

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

2001 · №5

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Сегодня мы расскажем об интернет-первопознаниях двух классических головоломок, с которыми не роз встречались читатели "Кванта".

Адрес:

[www.escher.com/escher.html](http://www.escher.com/escher.html)

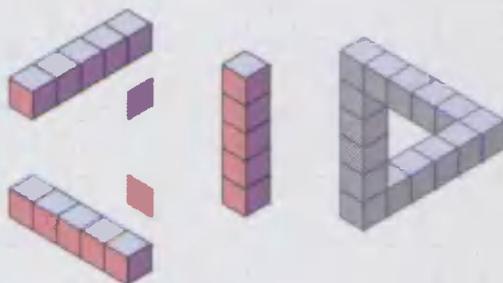
Впечатление от трехмерных предметов можно передать с помощью плоских изображений. Этим можно воспользоваться для того, чтобы создать противоречивое впечатление.

Посмотрите на рисунок. Каждая отдельная часть воспринимается как изображение трехмерного объемного предмета, но вся конструкция за счет неправильного соединения этих частей кажется предметом-призраком.

(Л. Пенроуз, Р. Пенроуз, "Невозможные объекты", "Квант" №5 за 1971 г.)

## НЕВОЗМОЖНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Скачав файл объемом 337 килобайт, вы получите конструктор, позволяющий собрать прямо на экране монитора невозможный треугольник, созданный знаменитым голландским художником Эшером.



Impossible Triangle

Адрес:

[www.math.com](http://www.math.com)

Эта головоломка известно уже довольно давно: Ее автором принято считать французского математика Э. Люка, создавшего ее на основе древних легенд.

Задача состоит в том, чтобы переложить все диски с одного стержня на другой, используя третий как промежуточный. При этом должны соблюдаться два условия:

- 1) за один ход можно переносить лишь один диск;
- 2) нельзя класть больший диск на меньший.

(А. Савин, "Ханойская башня", "Квант" №11 за 1991 г.)

## ХАНОЙСКАЯ БАШНЯ

### Tower of Hanoi 1.1



Congratulations

7

MOVES

На сайте с выразительным названием Math.com – World of Math Online сказано, что "Ханойская башня" — любимая головоломка программистов и ... буддийских монахов.

Ясно, что программисты не могли не выразить своего отношения к "Ханойской башне" и создали всевозможные программы для виртуального перекладывания дисков.

Предлагаем читателям решить в уме задачу для трех дисков, уложившись в наименьшее число ходов (оно равно 7).

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбиллин, В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,  
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарьгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,  
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,  
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Αράβι



Ελαϊόδοι

©2001, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Сверх ... (2). *М.Каганов*  
7 Три теоремы о выпуклых многогранниках. *Н.Долбиллин*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- В Закон Менделеева. *А.Васильев*  
Б Лайнус Полинг (к столетию со дня рождения). *Р.Свиридова*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи M1786–M1795, Ф1793–Ф1802  
19 Решения задач M1766–M1770, Ф1778–Ф1787  
26 Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2000 года

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 27 Задачи  
28 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
28 Победители конкурса «Математика 6–8» 2000 года  
29 Умножаем в уме. *Н.Самарцев*

## ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

- 31 Вращающееся кольцо тетраэдров. *В.Александров*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Преломление и отражение света

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Удивительные катки. *Б.Коган*  
36 Как чайник стал таймером. *А.Стасенко*  
37 Кто-то приближается? *А.Стасенко*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 40 Вихрь в тумане. *А.Стасенко*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 42 Иррациональные уравнения. *А.Егоров, Ж.Раббот*  
45 Корпускулярные и волновые свойства света. *В.Можаев*

## ОЛИМПИАДЫ

- 48 XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике  
52 XXXV Всероссийская олимпиада школьников по физике  
5 Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

- 56 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей! (25, 41)  
«Квант» улыбается (39)

## НА ОБЛОЖКЕ

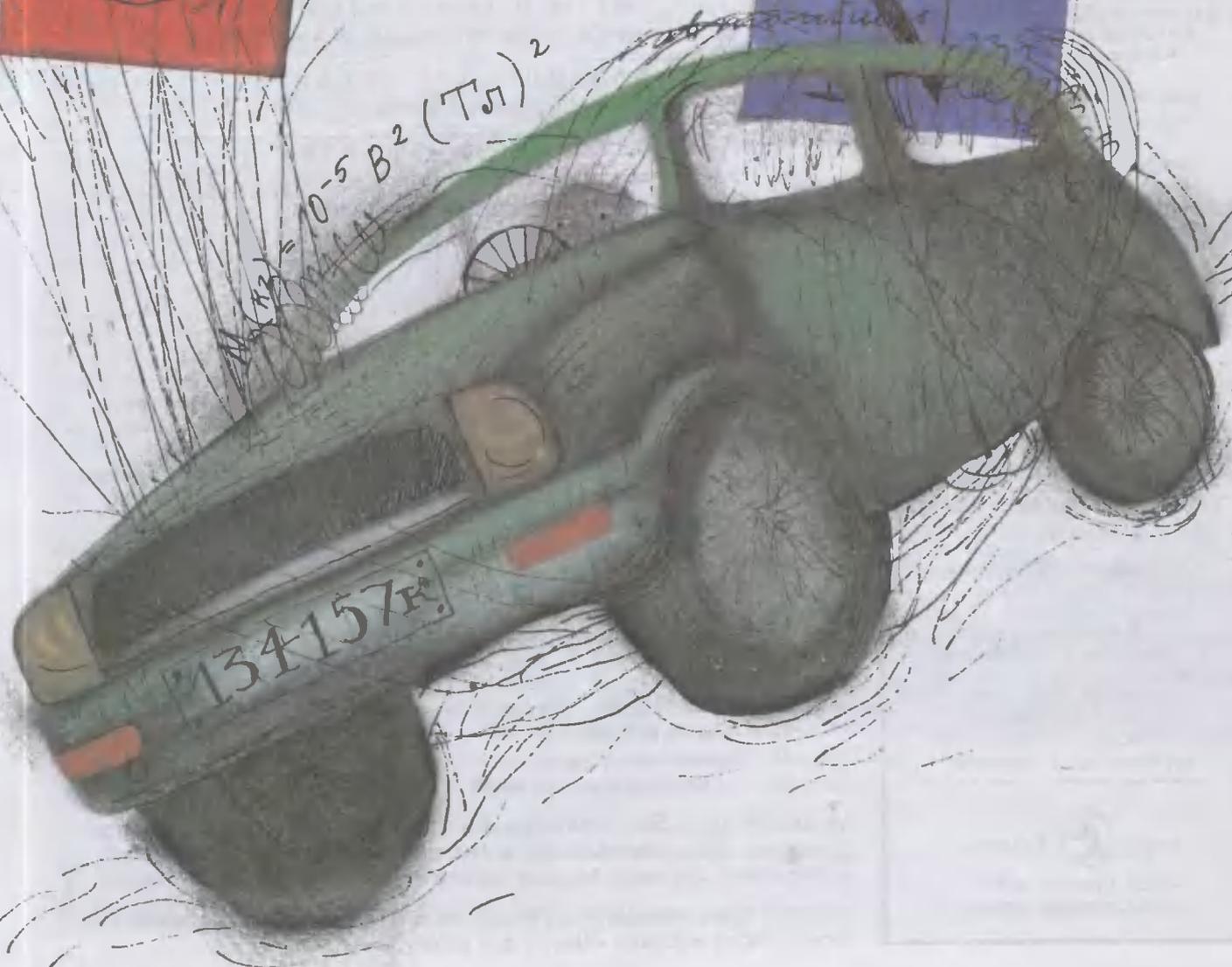
- I Иллюстрация к статье *Н.Долбиллина*  
II Кванты Интернета  
III Шахматная страничка  
IV Физики на монетах мира

Международная благотворительная организация Институт «Открытое общество. Фонд содействия» и Московский комитет образования выписывают для школ Москвы тысячу экземпляров журнала «Квант».

Частный предприниматель Русинович В.В. выписывает пятьдесят экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.



0-5 B<sup>2</sup> (T<sub>51</sub>)<sup>2</sup>



М. КАГАНОВ

**П**ОЧЕМУ Я РЕШИЛ НАПИСАТЬ статью с таким лапидарным названием, рассказано в предыдущей публикации (см. «Квант» №5 за 2000 г.). Возможно, имеет смысл добавить несколько фраз. Тот, кто решит вслед за мной перелистать «Физическую энциклопедию» (ФЭ), обратите, пожалуйста, внимание на тот факт, что в 5-м томе есть группа слов, начинающихся с приставки «супер» – от *супергетеродин*<sup>1</sup> до *суперструны*. Приставки «сверх» и «супер» по смыслу очень близки, если не тождественны. Но мне показалось, что они «разделили» между собой области физики: приставкой «супер» чаще начинаются термины атомной физики, физики элементарных частиц, квантовых полей, а приставкой «сверх» – термины физики макроскопических систем. Конечно, есть исключения (супергетеродин – одно из них).

Просматривая статьи, начинающиеся приставкой «супер», обнаружил термин *суперрешетка*, но вместо статьи – отсылка в 4-й том к термину *сверхрешетка*. Вот с этого понятия и начнем эту статью.

## Сверхрешетки

Признаюсь, к сверхрешеткам у меня особый интерес. Около 15 лет назад мой коллега В.Н.Луцкий высказал идею, а мы втроем (Виля Наумович, А.Я.Шик и я) сделали и опубликовали работу, в которой рассмотрели некоторые особенности проводимости сверхрешеток в квантовом магнитном поле (см. «Журнал экспериментальной и теоретической физики», 1987 г., т.92, вып.2, с. 721–729). Мы уверены, что особенности, которые мы обнаружили «на кончике пера», должны наблюдаться, но пока, насколько мне известно, их никто не наблюдал. Может быть, кто-нибудь из вас, мои молодые читатели, через какое-то время вспомнит прочитанную статью из «Кванта» и по-

<sup>1</sup> Напомним: если слово напечатано курсивом, значит, в ФЭ есть статья с таким названием.

пытается открыть предсказанное нами явление. (Мне очень приятно отметить, что автор статьи «Сверхрешетка» в 4-м томе ФЭ – А.Я.Шик.)

Итак, что такое сверхрешетка?

Каждый кристалл в своей основе имеет кристаллическую решетку, в узлах которой расположены атомы или ионы. Размеры ячейки кристаллической решетки у кристаллов разных сортов, конечно, различны, но, как правило, не превышают нескольких ангстрем ( $1\text{Å} = 10^{-8}\text{ см}$ ). Сверхрешетка – не создание природы, а рукотворный объект. Для того чтобы ее создать, надо «навязать» кристаллу период, в несколько раз превышающий период кристаллической решетки. Наиболее распространенный способ – «сложить» искусственный кристалл из слоев разных сортов. К сожалению, «складывание» на атомном уровне – весьма непростая задача, доступная только технически оснащенным лабораториям.

Если создавать сверхрешетки трудно, зачем этим заниматься? Конечно – в надежде получить не существующий в природе материал для приборов и приспособлений. Не вдаваясь в детали, перечислим, что предполагали и предполагают осуществить занимающиеся сверхрешетками: фильтры и поляризаторы инфракрасного излучения, нелинейные преобразователи СВЧ-сигналов, генераторы и усилители электромагнитных колебаний, частоты которых можно перестраивать в очень широком диапазоне изменением приложенного электрического поля и кое-что еще. Что из этого уже осуществлено, признаюсь, не знаю. В статье, которую я цитирую, совершенный вид глагола использован лишь один раз: «Сверхрешеточные гетероструктуры находят применение также в лавинных фотодиодах». Слово «также» обнадеживает...

Несомненно, сверхрешетки создавались в практических целях. Но, кроме того, у физиков появился совершенно новый объект, исследова-

ние которого, столь же несомненно, весьма интересно. Стоит подчеркнуть, что в последние годы это не единичный случай. Все чаще исследователей привлекают рукотворные объекты – объекты, не существующие в природе, а созданные руками человека для нужд современной техники. Трудно не упомянуть, что одно из наиболее интересных открытий последних десятилетий в макроскопической физике – квантовый эффект Холла – был обнаружен Клаусом фон Клитцингом в 1980 году на *полевом транзисторе* (Нобелевская премия по физике за 1985 г.).

Чем же интересны сверхрешетки? Основой наших представлений об электронных свойствах твердых тел служит изучение движения частиц в периодическом поле сил. Один из основных результатов рассмотрения такого движения – понимание того, что разрешенные значения энергии занимают участки (интервалы) конечной ширины. Их называют зонами, а теория, описывающая движение в периодическом поле сил, называется *зонной теорией*.

В твердых телах периодическую силу создают ионы, которые, когда нас интересует движение электронов, можно считать неподвижными, закрепленными в узлах строго периодической кристаллической решетки. Разных кристаллов много, периодические силы, действующие на электроны, тоже различны. Но какие есть, такие есть. Изменять их по своей воле очень непросто. Другое дело – сверхрешетки, т.е. искусственные кристаллы. Изменяя толщину прослойки, химический состав элементов, из которых сверхрешетка построена, можно менять периодическую силу в широчайших пределах. Поэтому создание сверхрешеток называют зонной инженерией, а иногда и  $\Psi$ -инженерией, так как появилась возможность диктовать электрону, какую ему иметь волновую ( $\Psi$ ) функцию.

Конечно, особый интерес представляют такие созданные искусственно

образцы, аналогов которых в природе не существует. Например, подобрав последовательность слоев из полупроводника и диэлектрика, можно добиться, чтобы движение электронов полупроводника поперек слоев (вдоль оси  $Z$ ) существенно отличалось от движения вдоль слоев (в плоскости  $XY$ ). Если диэлектрические прослойки столь толсты, что полностью непроницаемы для электронов, то каждая полупроводниковая прослойка существует независимо от остальных и в каждой электроны движутся только вдоль слоя. Считая, что вдоль слоев движение электрона очень похоже на движение в свободном пространстве, имеем

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m^*}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – энергия,  $p_x$ ,  $p_y$  – компоненты импульса, а  $m^*$  – эффективная масса электрона. Отличие  $m^*$  от массы свободного электрона  $m_e$  – свидетельство влияния на движение электрона ионов кристалла. Интересно, что  $m^*$  может быть и больше и меньше  $m_e$ .

Не кажется ли вам удивительным, что  $m^*$  может быть меньше  $m_e$ ? Масса частицы – мера ее способности двигаться. Скорость частицы массой  $m$  с энергией  $\varepsilon$  равна  $v = \sqrt{2\varepsilon/m}$ . Чем больше масса, тем скорость меньше. Неужели частица в периодическом поле сил может быть подвижнее, чем свободная частица? Да! И это не только теоретическое утверждение, основанное на квантово-механическом рассмотрении. Непосредственное измерение эффективных масс электронов полупроводников показывает, что  $m^*$  электронов проводимости может быть во много раз меньше  $m_e$ . Например, в GaAs  $m^*/m_e = 0,07$ , а в InSb  $m^*/m_e = 0,01$ .

Если диэлектрическая прослойка проницаема для электронов (за счет *туннельного эффекта*), то в формулу (1) надо добавить слагаемое, описывающее движение поперек слоев (вдоль оси  $Z$ ). При малой проницаемости барьеров, разделяющих проводящие слои, получим

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m^*} + \Delta \left( 1 - \cos \frac{p_z d}{h} \right). \quad (2)$$

Здесь  $d$  – период сверхрешетки вдоль оси  $Z$ ,  $h$  – постоянная Планка, а  $\Delta$  – величина размерности энергии,

пропорциональная электронному коэффициенту прозрачности диэлектрической прослойки. Мы видим, что значения энергии продольного движения заполняют интервал (зону) шириной  $2\Delta$ . Энергия движения вдоль слоев тоже периодически зависит от компонентов импульса, а разрешенные значения энергии заполняют зону – зону проводимости полупроводниковой прослойки, но ширина зоны проводимости столь велика по сравнению с величиной  $2\Delta$ , что можно ограничиться выражением для энергии поперечного движения вблизи ее дна, что и сделано в формулах (1) и (2).

Энергия электрона в сверхрешетке имеет минимум при  $p_x = p_y = p_z = 0$ , причем значение энергии в этой точке выбрано равным нулю. Вблизи минимума энергия квадратично зависит от компонентов импульса:

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m_x^*} + \frac{p_y^2}{2m_y^*} + \frac{p_z^2}{2m_z^*}, \quad (3)$$

где  $m_z = \hbar^2 / (\Delta d^2)$  – эффективная масса движения электрона вдоль оси  $Z$ . Как правило,  $m_z \gg m^*$ , и с уменьшением коэффициента прозрачности  $m_z$  растет, так как при этом заметно уменьшается параметр  $\Delta$ .

Анализируя формулу (2), нетрудно проследить, как меняется с ростом энергии форма (топология) изоэнергетических поверхностей (поверхностей равной энергии). При самых малых значениях энергии, когда справедлива формула (3), изоэнергетические поверхности – эллипсоиды, тем более вытянуты вдоль оси  $Z$ , чем менее прозрачны диэлектрические прослойки для электронов. С ростом энергии изоэнергетические поверхности в пространстве импульсов превращаются в открытые поверхности (в гофрированные цилиндры). Характерный не только для искусственных, но и для естественных кристаллов топологический переход от замкнутых к открытым изоэнергетическим поверхностям может быть изучен с помощью исследования свойств сверхрешеток.

В работе, о которой говорилось в начале статьи, авторы обратили внимание на то, что сверхрешетки должны обладать интересными свойствами, если их поместить в магнитное поле, перпендикулярное слоям. Прежде всего, каждый слой будет

демонстрировать квантовый эффект Холла<sup>2</sup>, который состоит в следующем. При некоторых значениях магнитного поля  $B_N$  сопротивление и, одновременно, диссипативная часть проводимости обратятся в ноль, а холловское сопротивление  $R_x$  с поразительной точностью будет выражаться через комбинацию фундаментальных констант:

$$R_x = \frac{2\pi\hbar}{Ne^2}, \quad N = 1, 2, 3... \quad (4)$$

Кроме того, при тех же значениях магнитного поля (при  $B = B_N$ ) исчезнет проводимость вдоль оси  $Z$  – образец вовсе перестанет быть проводником, он превратится в диэлектрик. Правда, в весьма своеобразный диэлектрик: в нем должен иметь место квантовый эффект Холла, а ведь привычно эффект Холла – свойство электронного проводника. Даже термин специальный «изобрели» – холловский диэлектрик.

### Сверхсильные магнитные поля

Это – следующая тема нашего сегодняшнего разговора.

«Сверхсильные магнитные поля – поля с индукцией  $B \geq 1$  МГс (граница условная)», – так начинается статья в ФЭ.<sup>3</sup> Следующая фраза разъясняет: «Классификацию магнитного поля обычно связывают со способами получения полей». О способах получения сильных и сверхсильных магнитных полей поговорим ниже и очень кратко. Задача этой части статьи – не разъяснение устройства источников сильных магнитных полей, а попытка научить «чувствовать» величину магнитного поля, сделать магнитное поле «осязаемым». Это – непростая задача, так как человек не обладает органом чувств, позволяющим ему ощущать магнитное поле непосредственно.

Очевидно, что  $1 \text{ МГс} = 10^6 \text{ Гс}$ , а гаусс – единица индукции магнитного поля в системе СГС (сантиметр – грамм – секунда), называемой так

<sup>2</sup> Об этом эффекте можно прочитать, например, в статье С. Семенчикова «Эффект Холла: год 1879 – год 1980» («Квант» №2 за 1987 г.).

<sup>3</sup> На самом деле в ФЭ говорится не об индукции  $B$  магнитного поля, а о его напряженности  $H$ , но эта физическая величина совсем не фигурирует в школьном курсе физики.

же гауссовой системой единиц.<sup>4</sup> Единица названа в честь немецкого физика Карла Фридриха Гаусса (1777 – 1855). По-видимому, гаусс – маленькая единица, если, для того чтобы магнитное поле было сверхсильным, нужно поле индукцией в миллион гаусс. В Международной системе единиц (СИ) пользуются более крупной единицей для измерения магнитного поля – тесла (Тл): 1 Тл = 10<sup>4</sup> Гс. Эта единица получила название в честь Никола Тесла (1856 – 1943) – сербского ученого в области электро- и радиотехники.

Слово «сильный», а тем более «сверхсильный», имеет эмоциональную окраску. Словосочетание «сильное магнитное поле» вызывает в моей памяти рисунок из какой-то скорее всего научно-популярной книжки: магнитный подъемный кран поднимает автомобиль. Особенно большое впечатление на меня производил рисунок после того, как я понял, что магнетизм – квантовое свойство.<sup>5</sup> «Квант», «квантовый» – эти термины воспринимались как нечто, относящееся к атому, к субатомной частице, а тут – магнит, да еще поднимает автомобиль! Однако оказывается, что магнит, способный удерживать тонну металла, должен создать отнюдь не сверхсильное магнитное поле: достаточно всего 10<sup>4</sup> Гс!

Теперь от магнитного подъемного крана перейдем к микроскопическим магнетикам – к электронам, протонам, нейтронам. Каждый из них создает вокруг себя свое магнитное поле. Мерой способности электрона создавать магнитное поле служит *магнетон* Бора, или *магнитный момент* электрона,

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0,9 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс},$$

(заметим, что в единицах СИ в формуле отсутствует  $c$ ), а магнитные моменты протона и нейтрона удобно

<sup>4</sup> В этой статье автор использует гауссовую систему единиц, незнакому большинству наших читателей. Эта система отличается от привычной СИ не только наименованиями и значениями единиц измерения физических величин, но и наличием многих формул. Однако мы решили в виде исключения сохранить привычную для автора и вообще для физиков-теоретиков систему единиц, чтобы читатель получил более глубокое представление о «кухне» теоретической физики. (Прим. ред.)

<sup>5</sup> См. книгу М.И.Каганова и В.М.Цукерника «Природа магнетизма» (Библиотечка «Квант», выпуск 16, 1982 г.).

оценивать с помощью ядерного магнетона

$$\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс},$$

где  $m_p$  – масса протона. Ясно видно, что из-за сравнительно большой массы нуклона магнитные моменты протона и нейтрона во много раз меньше магнитного момента электрона. Есть интересные и важные явления, связанные магнетизмом нуклонов, но наиболее существенную роль в физике магнитных явлений играют электроны. Такие явления, как ферро- и антиферромагнетизм, – электронно-го происхождения.

Как известно, при удалении от магнитного диполя созданное им магнитное поле убывает обратно пропорционально кубу расстояния от диполя. Правда, кроме того, магнитное поле зависит от направления по отношению к диполю (не надо забывать, что магнитный диполь – вектор, который характеризуется не только величиной, но и направлением). Выбрав направление таким, чтобы магнитное поле было максимальным, можно оценить величину магнитного поля на атомном расстоянии от электрона. Мерой атомного расстояния служит радиус Бора (см. *Бора радиус*)

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см},$$

тогда магнитное поле на расстоянии  $a_0$  от электрона будет

$$B \sim \frac{\mu_e}{a_0^3} \sim 10^4 \text{ Гс}.$$

Скажем откровенно, эта величина мало что характеризует: магнитные поля, создаваемые отдельными микрочастицами, имеют, как правило, совершенно случайные направления; складываясь, они либо компенсируют друг друга, либо усиливают. Результат – какое магнитное поле создает тело и создает ли оно его на макроскопических расстояниях – зависит от строения тела, в состав которого входят микрочастицы.

Наличие у микрочастиц заряда  $e$  и магнитного момента  $\mu$  делает их чувствительными (восприимчивыми) к магнитному полю. В магнитном поле  $\vec{B}$  на всякую заряженную движущуюся со скоростью  $\vec{v}$  частицу действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}].$$

(Заметим, что в СИ формула для силы Лоренца имеет другой вид:  $\vec{F}_L = e[\vec{v} \vec{B}]$ .) Под действием этой силы частица (для определенности, электрон) вращается в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ . Каждый вращающийся электрон обладает магнитным моментом, направленным против магнитного поля. Энергия движения электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, квантуется. Разность энергий соседних уровней есть  $e\hbar B / (m^* c)$ . Но, кроме того, как мы уже говорили, электрон обладает собственным магнитным моментом. Собственный магнитный момент электрона  $\mu_e$  ориентируется либо по магнитному полю, либо против. Разность энергий двух ориентаций равна  $2\mu_e B = e\hbar B / (m_e c)$ . Если  $m^*$  и  $m_e$  не слишком отличаются друг от друга, то величина  $e\hbar B / (m_e c)$  может служить энергетической мерой воздействия магнитного поля на любую атомную систему. Если же  $m^* \ll m_e$  (как мы говорили, такое бывает в некоторых полупроводниках и полуметаллах), то роль магнитного поля больше, чем можно было бы думать, руководствуясь оценкой, получаемой при использовании массы свободного электрона.

Основные силы, действующие между электронами и ядрами в атомах, – это силы электростатического притяжения и отталкивания. Им соответствует энергия порядка  $e^2/a$ . Каково должно быть магнитное поле, чтобы соответствующая ему энергия превышала электростатическую? Сравним  $2\mu_e B$  и  $e^2/a$ , подставив значение борковского радиуса:

$$2\mu_e B > \frac{e^2}{a_0},$$

если

$$B > B_{\text{ат}} = \frac{m_e^2 e^3 c}{\hbar^3} = 2,35 \cdot 10^9 \text{ Гс(!)}.$$

Таким образом, сверхсильное магнитное поле должно существенно сказываться на структуре атомов, молекул, твердых тел.

Сделаем еще один шаг – в сторону больших магнитных полей. Запишем электростатическую энергию  $e^2/a_0 = e^4 m_e / \hbar^2$  несколько иначе. Умножим числитель и знаменатель правой части последнего равенства

на  $c^2$ . Тогда получим

$$\frac{e^2}{a_0} = m_e c^2 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \equiv m_e c^2 \left( \frac{1}{137} \right)^2.$$

Безразмерную комбинацию из мировых констант  $e^2/(\hbar c) = 1/137$  принято считать безразмерным зарядом электрона. Многие черты Мира, в котором мы живем, связаны с тем, что безразмерный заряд электрона мал. К сожалению, нет возможности остановиться на этом факте сколько-нибудь подробно, но, думаю, имеет смысл его запомнить ...

Если магнитное поле в  $(137)^2$  раз больше  $B_{ат}$ , т.е. если  $B \geq B_{ка} = m_e^2 c^3 / (e\hbar)$ , то  $2\mu_e B$  превышает энергию покоя электрона  $m_e c^2$  (индекс «кэ» обозначает словосочетание «квантовая электродинамика»). В области пространства, где магнитное поле столь велико, изменяется электродинамическое поведение элементарных частиц; электродинамика в этом случае требует использования не только релятивистских, но и квантовых законов.

Встречаются ли столь большие магнитные поля в природе? В цитируемой статье приведено несколько примеров. Мы воспользуемся часто применяемым приемом – поражать, так поражать: поля  $10^{10} - 10^{13}$  Гс зарегистрированы у рентгеновских пульсаров, т.е. в двойных звездных системах. Для сравнения: среднее значение магнитного поля у земной поверхности равно 0,5 Гс.

Пришло время выполнить обещание и хотя бы в нескольких словах рассказать о получении сильных и сверхсильных магнитных полей в земных условиях. Прежде всего отметим, что получение сильных магнитных полей – сложная техническая задача, для решения которой необходим инженерный опыт, специальные материалы и ... прекрасное знание физики. В истории создания источников сильного магнитного поля большую роль сыграли такие выдающиеся физики, как П.Л.Капица и А.Д.Сахаров. Их имена связаны с созданием импульсных магнитных полей – полей, существующих доли секунды.

До сих пор в центральном зале Института физических проблем имени П.Л.Капицы стоит генератор, с помощью которого Петр Леонидович еще в 20-е годы начал исследование влияния магнитного поля на

электропроводность металлов, впервые используя для этой цели магнитное поле порядка 300 кГ. Для создания такого магнитного поля Капица применил разряд батареи конденсаторов через токовое кольцо. Один из томов Научных трудов П.Л.Капицы назван «Сильные магнитные поля» (М.: Наука, 1988). В нескольких статьях подробно рассказано и о конструкции генератора поля, и о различных опытах, проведенных в магнитном поле в сотни килогаусс. Использование рекордного (в то время) магнитного поля естественно привело к открытиям. Одно из них даже получило в физической литературе имя закона Капицы (см. *Капицы закон*). Оказалось, что в сильном магнитном поле сопротивление большинства металлов линейно растет с магнитным полем. Это открытие послужило толчком к активному исследованию гальваномагнитных явлений в металлах.

Метод, идея которого принадлежит А.Д.Сахарову (1951 г.), назван методом сжатия магнитного потока (или магнитной кумуляцией). На первый взгляд идея весьма проста: внутри проводящей цилиндрической оболочки радиусом  $R_{нач}$  надо создать продольное магнитное поле  $B_{нач}$  и затем симметрично и достаточно быстро сжать цилиндр так, чтобы его радиус уменьшился во много раз. Если поток магнитного поля  $\Phi = \pi R_{нач}^2 B_{нач}$  не успеет измениться за время сжатия, то магнитное поле возрастет до величины  $B_{кон} = B_{нач} (R_{нач}^2 / R_{кон}^2)$ . Чтобы понять, насколько простота кумуляционного метода иллюзорна, надо иметь в виду, что необходимая скорость сжатия достигается с помощью взрывов. В частности, это означает, что каждое устройство работает один раз. Но результаты впечатляют: в таких системах получены поля до 3,2 МГс. Еще более поразительны планы: при использовании сравнительно небольшого ядерного взрыва надеются получить магнитное поле до  $10^3$  МГс. Вот так! Оказывается, пугающие всех ядерные взрывы могут приносить пользу науке. В Научных трудах А.Д.Сахарова (М.: Центрком, 1995) получению сильных магнитных полей с помощью взрывов посвящены две большие статьи с современными комментариями. По ним можно не только ознакомиться со многими физическими

и техническими подробностями, но и почувствовать ту обстановку, в которой работал А.Д.Сахаров.

## Сверхсветовые скорости в астрофизике

С таким названием в ФЭ есть сравнительно большая статья. К сожалению, она слишком специальна для сколько-нибудь подробного ее изложения на страницах журнала «Квант». Речь в статье идет о наблюдении радиоизлучения центральных областей галактик, которые привели к парадоксальному выводу, что излучающие частицы движутся со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Анализ всей совокупности наблюдательных данных помог ликвидировать парадокс. Если некоторое излучающее физическое образование (сгусток плазмы) перемещается к наблюдателю со скоростью  $v_{п}$  под углом  $\phi$  к лучу зрения, то проекция его скорости на небесную сферу равна  $v_{п} \sin \phi$ . Наблюдая за движением изображения сгустка по небесной сфере, ученые пришли к выводу, что  $v_{п} > c$ . Ошибка связана с тем, что не принято во внимание приближение излучающего сгустка к наблюдателю. Чем ближе сгусток придвигается, тем меньше времени требуется излученному свету, чтобы достигнуть наблюдателя. Из-за этого скорость перемещения пятна по небесной сфере (в картинной плоскости) равна

$$v_{наб} = \frac{v_{п} \sin \phi}{1 - (v_{п} \cos \phi)/c}.$$

При релятивистских скоростях источника  $v_{п}$  и небольших углах  $\phi$  наблюдаемая скорость  $v_{наб}$  может превышать скорость света в вакууме.

Должен признаться, что последний раздел внесен в статью с сугубо педагогическими целями. Во-первых, чтобы продемонстрировать единство законов природы, действующих во всей необозримой Вселенной. Во-вторых, чтобы предупредить – к словам надо относиться с осторожностью. Встретив термин «сверхсветовые скорости в астрофизике», доверчивый читатель – именно потому, что относится термин к астрофизике, – может подумать, что правы писатели-фантасты и скорость света не есть предел для будущих астронавтов. Как видите, это не так.

# Три теоремы о выпуклых многогранниках

Н. ДОЛБИЛИН

**М**НОГОГРАННЫЕ ФОРМЫ окружают нас повсюду. Почти все сооружения, возведенные человеком, от древнеегипетских пирамид до современных небоскребов, имеют форму многогранников. Многогранные формы встречаются у многих минералов и, что особенно удивительно, у некоторых растений и даже живых организмов (радиолярий; рис.1).

Серьезный интерес к многогранникам возник около четырех тысяч лет тому назад и проявлялся не только в рамках математики и ее приложений. Платон и Кеплер привлекали многогранники для философского и научного осмысления окружающего мира. Благодаря изяществу своих форм многогранники вошли в искусство (живопись, скульптура).

В статье будет рассказано о трех

изумительных теоремах о выпуклых многогранниках. Первая из них – знаменитая теорема Эйлера о соотношении между количеством вершин, ребер и граней в многограннике. Как было позднее осознано, она явилась первой теоремой топологии – области математики, которая изучает геометрические свойства фигур, например многогранников, не зависящие от длин ребер, величин



Иллюстрация Л. Тишкова

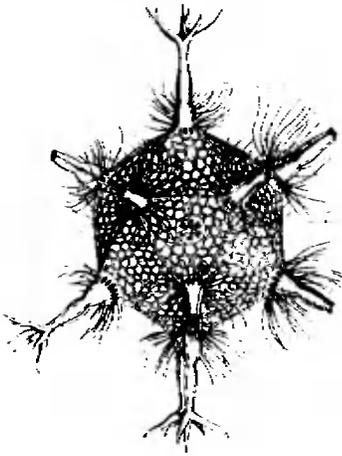


Рис.1

плоских или двугранных углов, площадей граней и, вообще, от всего, что так или иначе определяется расстоянием между точками.

Вторая замечательная теорема была доказана в 1813 году французским математиком Огюстеном Коши. Эта теорема утверждает, что если из данных плоских многоугольников, взятых в одинаковом порядке, можно склеить выпуклый многогранник, то такой многогранник будет единственным. В частности, теорема Коши объясняет то, что известно каждому, кто клеил или держал в руках картонную модель многогранника: ее жесткость. Это свойство удивляет потому, что многогранник, казалось бы, должен задаваться не только своими гранями, но и двугранными углами. Смотрите: для задания многоугольника, если это не треугольник, недостаточно только длин сторон, нужно задать и углы. А вот многогранник задается однозначно лишь своими гранями. И это несмотря на то, что каждые две смежные по ребру грани, взятые сами по себе, легко поворачиваются вокруг общего ребра, словно книжные страницы вокруг корешка... В процессе склеивания модель будущего многогранника какое-то время сохраняет подвижность из-за изменения двугранных углов. Но как только заклеивается последняя грань, двугранные углы фиксируются и модель становится жесткой. Доказательство теоремы Коши элементарное, что не означает «легкое». Однако единственное, что нужно знать помимо школьной программы, чтобы понять доказательство, — это теорема Эйлера.

Третья совершенно удивительная теорема была открыта и доказана

выдающимся геометром XX века академиком Александром Даниловичем Александровым (1912–1999). Если теорема Коши говорит о единственности выпуклого многогранника с данной разверткой его граней, то теорема Александрова сообщает необходимые и достаточные условия, при которых из развертки можно склеить выпуклый многогранник. Как мы увидим позже, в отличие от теоремы Коши, теорема Александрова весьма неожиданна. Многие развертки, удовлетворяющие условиям Александрова, кажутся непригодными для того, чтобы из них можно было склеить какой-либо многогранник. Но уверенность в том, что теорема верна, заставляет искать и в итоге находить тот многогранник, который склеивается из данной развертки. В отличие от предыдущих теорем доказательство теоремы Александрова неэлементарное и трудное.

### Многогранник – это тело или поверхность?

Одни считают, что многогранник — это поверхность, состоящая из плоских граней. Другие возражают: нет, многогранник — это трехмерное тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Кто прав? И те, и другие. Все зависит от контекста. Для столешницы, сколачивающего ящик из шести фанерных прямоугольников, параллелепипед — это поверхность, а для каменщика, возводящего кирпичную стену, параллелепипед — это, наверное, тело. В этой статье мы будем представлять многогранник в основном как поверхность.

Будем называть *многогранником* множество  $M$  плоских выпуклых многоугольников — *граней*, расположенных в пространстве так, что

1) каждая сторона любого многоугольника является стороной в точности еще одного многоугольника из  $M$  (эта сторона, общая для двух многоугольников, называется *ребром*);

2) от каждого многоугольника из  $M$  к любому другому можно пройти по цепочке многоугольников из  $M$ , в которой каждые два последовательных многоугольника смежны по общей стороне;

3) если два многоугольника имеют общую вершину, то такую цепочку можно составить из многоугольников, сходящихся в этой вершине.

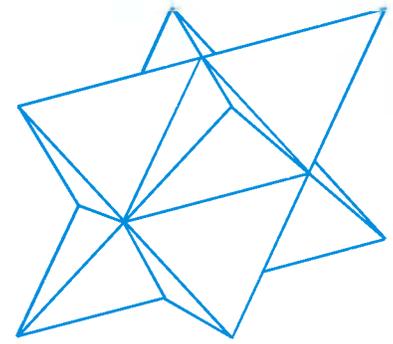


Рис.2

Фигура на рисунке 2 является многогранником. Совокупность из 18 квадратов на рисунке 3 многогранником не является, потому что в ребре  $AB$  нарушается условие 1), а в

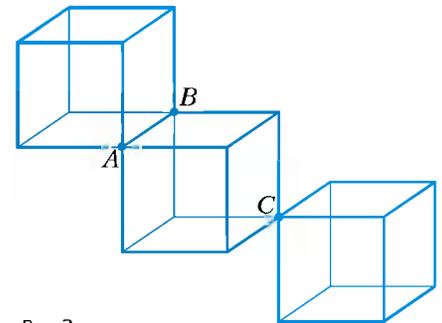


Рис.3

вершине  $C$  не соблюдается условие 3).

**Упражнение 1.** Докажите, что в любом многограннике имеются по крайней мере две одноименные грани.

Многогранник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости каждой его грани.

### Теорема Эйлера

Эта теорема впервые появилась в журнале Петербургской Академии наук в работах Леонарда Эйлера<sup>1</sup> «Элементы учения о телах» и «Доказательство некоторых замечатель-

<sup>1</sup> Леонард Эйлер (1707, Базель, Швейцария — 1783, Санкт-Петербург), гениальный математик, в течение 31 года проработав в Петербурге, член Петербургской Академии наук. Нам, гражданам России XXI века, любопытно узнать, что современник Эйлера знаменитый математик Иоганн Бернулли в связи с переездом Эйлера из Швейцарии в Россию писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Общепризнано, что Эйлер на проглядел ничего в современной ему математике, хотя последние семнадцать лет своей жизни он был слепым.

ных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями».

**Теорема Эйлера.** Пусть  $V$  – число вершин выпуклого многогранника,  $P$  – число его ребер и  $\Gamma$  – число граней. Тогда верно равенство

$$V - P + \Gamma = 2 \quad (*)$$

Число  $\chi = V - P + \Gamma$  называется *эйлеровой характеристикой* многогранника. Согласно теореме Эйлера, для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2. То, что эйлерова характеристика равна 2 для многих знакомых нам многогранников, видно из следующей таблички:

Многогранник	$V$	$P$	$\Gamma$	$\chi$
тетраэдр	4	6	4	2
куб	8	12	6	2
октаэдр	6	12	8	2
н-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$	2
н-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$	2

### Обобщенная теорема Эйлера

В действительности мы докажем более общую теорему, которая верна не только для выпуклых многогранников, но для произвольных графов на сфере.

Поместим внутри выпуклого многогранника  $M$  сферу  $S$ . Центр  $O$  сферы  $S$  также лежит внутри многогранника  $M$ . Спроектируем многогранник  $M$  из центра  $O$  на сферу. Так как многогранник выпуклый, то всякий луч с началом в точке  $O$ , лежащей внутри многогранника, пересекает многогранник в единственной точке, которая проектируется в некоторую точку на сфере. Так что проектирование является взаимно однозначным соответствием между точками многогранника и точками сферы. При этом вершины много-



Рис. 4

гранника проектируются в точки на сфере, а ребра проектируются в дуги больших окружностей. Эти точки-вершины и дуги-ребра образуют граф  $G$ , расположенный на сфере  $S$ . Ребра этого графа разбивают сферу на области, которые являются проекциями граней многогранника. Футбольный мяч, сшитый из пятиугольников и шестиугольников, можно рассматривать как проекцию многогранника на сферу (рис.4).

Рассмотрим теперь на сфере совершенно произвольный граф  $G$ , состоящий из  $V$  вершин и  $P$  ребер. Каждое ребро имеет два конца, являющиеся вершинами графа. При этом предполагаем, что любые два ребра либо имеют общую вершину, либо не пересекаются вовсе. Граф  $G$ , вообще говоря, может распасться на некоторое число  $K$  связных частей (компонентов). В каждом компоненте, по определению, от любой вершины к любой другой вершине компонента можно перейти по цепочке ребер из графа. И, наоборот, вершины из разных компонентов связать реберным путем невозможно. Граф разбивает сферу на какое-то число  $\Gamma$  связных областей.

Например, граф  $G$  на рисунке 5 имеет 18 вершин, 12 ребер, 3 области («нос», «рот» и все остальное). Граф состоит из 8 связных компонентов.

Если граф  $G$  является проекцией выпуклого многогранника на сферу,

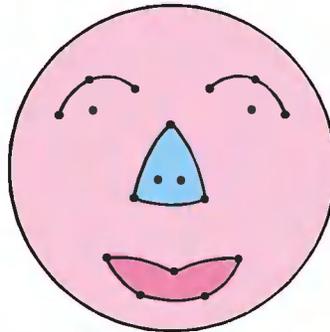


Рис.5

то число  $V$  вершин графа – это число вершин многогранника, число  $P$  ребер графа – это число ребер многогранника, число  $\Gamma$  областей на сфере – это число граней многогранника, а число  $K$  компонентов равно 1.

**Обобщенная теорема Эйлера.** Для графа на сфере верно равенство

$$V - P + \Gamma - K = 1 \quad (**)$$

**Доказательство.** Заметим, что так как для выпуклого многогранника

$K = 1$ , то из этой теоремы немедленно вытекает «обычная» теорема Эйлера для выпуклого многогранника.

Рассмотрим теперь особый граф, который назовем «звездное небо». Этот граф содержит лишь одни вершины и не содержит ни одного ребра. Такой граф действительно напоминает совокупность звезд на небесной сфере. Он состоит из некоторого числа  $V$  вершин. Так как в графе нет ребер, то сфера не разбивается на различные области, т.е.  $\Gamma = 1$ . По той же причине отсутствия ребер в графе столько же компонентов, сколько вершин:  $V = K$ . Поэтому для «звездного неба» обобщенная формула (\*\*\*) верна:  $V - 0 + 1 - K = 1$ . Обобщенная формула Эйлера верна и для графа на рисунке 5, а именно:  $18 - 12 + 3 - 8 = 1$ .

Пусть  $G$  – произвольный граф, содержащий ребро. Мы покажем, что из графа  $G$  можно выбросить ребро так, что для старого графа  $G$  и нового графа  $G'$  соответствующие суммы равны:  $V - P + \Gamma - K = V' - P' + \Gamma' - K'$ .

Возможны два случая.

1) Пусть в графе  $G$  существует ребро  $e$  со свободным концом, т.е. хотя бы один конец у ребра  $e$  не принадлежит никакому другому ребру. Например, в графе на рисунке 5 ребро из «брови» имеет свободный конец. Удалим это ребро. Условимся, что, удаляя ребро  $e$ , мы оставляем обе его концевые вершины. Таким образом, для нового графа имеем:  $V' = V$ ,  $P' = P - 1$ . Так как у ребра  $e$  хотя бы один конец был свободным, то к ребру  $e$  с обеих его сторон прилегает одна и та же область. Другими словами, это ребро не разделяет в графе  $G$  никаких двух областей. Поэтому удаление ребра  $e$  не приводит к уменьшению числа областей в графе  $G'$ :  $\Gamma' = \Gamma$ . А вот число компонентов при удалении ребра со свободным концом увеличивается на 1 за счет того, что две концевые вершины ребра  $e$  в графе  $G$  принадлежат одному компоненту, а после удаления ребра – разным. Итак,  $K' = K + 1$ . Поэтому у графа  $G'$  сумма

$$\begin{aligned} V' - P' + \Gamma' - K' &= \\ &= V - (P - 1) + \Gamma - (K + 1) = \\ &= V - P + \Gamma - K \end{aligned}$$

та же, что и у  $G$ .

2) А что делать, если в графе  $G$  нет ни одного ребра со свободным кон-

цом? В этом случае в каждой вершине графа, к которой подходит хотя бы одно ребро, сходятся, как минимум, два ребра. По этой причине в графе  $G$  можно найти *простой замкнутый* реберный путь. *Замкнутый* – это путь, который возвращается туда, откуда он вышел, а *простой* путь, подобно окружности, не пересекает сам себя. В графе на рисунке 5 «нос» и «рот» образуют простой замкнутый контур. Опять же, подобно окружности, простой замкнутый путь разбивает сферу на две области. Это очевидное на первый взгляд утверждение доказывается очень непросто и известно в математике как теорема Жордана.

Почему в графе  $G$ , не содержащем ребер со свободным концом, имеются простые замкнутые реберные пути? Давайте отправимся в путь из произвольного ребра графа, переходя каждый раз от одного ребра через его концевую вершину к соседнему ребру. Так как в каждой вершине, в которую мы приходим, сходятся не меньше двух ребер, то можно путешествовать по ребрам графа сколь угодно долго. Но вершин в графе конечное число. Поэтому рано или поздно наступит такой момент, когда мы впервые придем в вершину, скажем  $A$ , в которой были уже прежде. Тогда реберный путь  $w$ , пройденный от вершины  $A$  до первого возвращения в эту же вершину, будет очевидно простым и замкнутым. Удалим из пути  $w$  какое-нибудь ребро  $e$ . Число вершин не изменится:  $V' = V$ . Число ребер уменьшится на единицу:  $P' = P - 1$ . Так как по разные стороны от удаленного ребра  $e$  лежали разные области, то после удаления ребра они объединятся в одну область. Значит, число областей уменьшится на единицу:  $G' = G - 1$ . При этом число компонентов в графе не уменьшится. Действительно, концевые вершины удаленного ребра  $e$  можно соединить и в графе  $G'$ . Для этого нужно пройти от одной концевой вершины ребра  $e$  к другой по дополнительной части замкнутого пути  $w$ . Поэтому любые две вершины  $v$  и  $v'$ , соединенные некоторым путем в графе  $G$ , можно соединить и в графе  $G'$ , заменив при необходимости выкинутое ребро  $e$  на путь, соединяющий концевые вершины этого ребра.

Итак, и в случае 2) всегда можно найти ребро, при удалении которого

сумма

$$V' - P' + G' - K' = V - (P - 1) + (G - 1) - K = V - P + G - K$$

также не меняется.

Таким образом, мы из любого графа можем удалить ребро, не меняя при этом суммы  $V - P + G - K$ . В результате последовательного удаления всех ребер мы приходим к графу «звездное небо», для которого обобщенная формула, как было проверено выше, верна. Следовательно, обобщенная формула верна и для исходного графа  $G$ .

Обобщенная теорема Эйлера доказана.

### Следствия из теоремы Эйлера

Теорема Эйлера играет огромную роль в математике. С ее помощью было доказано огромное количество теорем. Находясь в центре постоянного внимания со стороны математиков, теорема Эйлера получила далеко идущие обобщения. Более того, эта теорема открыла новую главу в математике, которая называется *топологией*.

Во время работы над своей теоремой Эйлер вывел из нее несколько утверждений, относящихся к выпуклым многогранникам:

$$1) P + 6 \leq 3V \text{ и } P + 6 \leq 3G;$$

$$2) G + 4 \leq 2V \text{ и } V + 4 \leq 2G;$$

3) у всякого многогранника есть хотя бы одна треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань, а также хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол;

4) сумма плоских углов всех граней многогранника равна  $2\pi V - 4\pi$ .

Мы докажем первое неравенство и последнее утверждение, оставив остальное для самостоятельной работы.

Докажем неравенство  $P + 6 \leq 3V$ . Перепишем соотношение Эйлера дважды, один раз в виде

$$P + 2 = V + G$$

и другой раз в виде

$$4 = 2V - 2P + 2G.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$P + 6 = 3V + 3G - 2P.$$

Так как у каждой грани многогранника не менее трех сторон, то  $3G \leq 2P$ . Отсюда сразу получаем  $P + 6 \leq 3V$ .

Докажем утверждение 4). Обозначим через  $G_i$  число  $i$ -угольных граней в многограннике  $M$ . Ясно, что

$$G = G_3 + G_4 + G_5 + \dots \quad (1)$$

Ясно также, что каждая  $i$ -угольная грань содержит  $i$  ребер многогранника. С другой стороны, каждое ребро многогранника принадлежит в точности двум граням. Поэтому в сумме  $3G_3 + 4G_4 + 5G_5 + \dots$  каждое ребро многогранника подсчитано, причем подсчитано дважды. Отсюда имеем

$$2P = 3G_3 + 4G_4 + 5G_5 + \dots \quad (2)$$

Рассмотрим теперь сумму  $S$  плоских углов многогранника:

$$S = G_3 \cdot \pi + G_4 \cdot 2\pi + \dots + G_i \cdot (i - 2)\pi + \dots \quad (3)$$

С учетом соотношений (1) и (2) и теоремы Эйлера соотношение (3) можно переписать так:

$$S = G_3(3 - 2)\pi + G_4(4 - 2)\pi + \dots + G_i(i - 2)\pi + \dots = 2P\pi - 2G\pi = 2V\pi - 4\pi.$$

Утверждение 4) доказано.

### Упражнения

2. Докажите, что для выпуклого многогранника а)  $P + 6 \leq 3G$ ; б)  $G + 4 \leq 2V$ ; в)  $V + 4 \leq 2G$ .

3. Докажите, что у выпуклого многогранника есть либо по меньшей мере одна треугольная грань, либо трехгранный угол при вершине.

Утверждение 4) по существу эквивалентно важной теореме о многогранниках, доказанной французским математиком Рене Декартом (1596–1650).<sup>2</sup>

Возьмем произвольную вершину  $v$  многогранника и соответствующий многогранный угол с вершиной в  $v$ . Пусть  $\alpha(v)$  – сумма всех плоских углов этого пространственного угла. Легко показать, что у выпуклого многогранного угла сумма плоских углов строго меньше  $2\pi$ . Разность  $\omega(v) = 2\pi - \alpha(v)$  называется *кривизной* вершины  $v$ . Таким образом, кривизна вершины выпуклого многогранника строго положительна. Например, кривизна вершины куба

<sup>2</sup> Создав координатный метод, чтобы «повернуть алгеброй» геометрию, и тем самым, по мнению некоторых весьма уважаемых математиков, «звук (геометрии) умертвить», Декарт в то же время был первым геометром, который после древних греков занимался общей теорией многогранников.

равна  $\pi/2$ , вершины правильного тетраэдра –  $\pi$ , октаэдра –  $2\pi/3$ .

Сумма кривизн всех вершин  $\sum_{v \in M} \omega(v)$  многогранника  $M$  называется *кривизной многогранника*. Декарт доказал следующую теорему<sup>3</sup>.

**Теорема Декарта.** Кривизна  $\omega(M)$  любого выпуклого многогранника  $M$  равна  $4\pi$ .

Легко проверить, что  $\omega(M) = 4\pi$  для куба или правильного тетраэдра. Чтобы лучше понять, почему кривизна любого многогранника равна  $4\pi$ , полезно подсчитать кривизну произвольного тетраэдра.

Значение кривизны многогранника выводится из утверждения 4) в одну строчку:

$$\begin{aligned} \omega(M) &= \sum_{v \in M} \omega(v) = \sum_{\tau \in M} (2\pi - \alpha(\tau)) = \\ &= \sum_{\tau \in M} 2\pi - \sum_{v \in M} \alpha(v) = B \cdot 2\pi - S = 4\pi. \end{aligned}$$

Как отмечал Эйлер в одной из своих работ, многоугольники на плоскости можно классифицировать по числу сторон (или, что все равно, по числу вершин): треугольники, четырехугольники и т.д., в то время как аналогичный вопрос описания многогранников оказывается гораздо сложнее. Теорема Эйлера помогает немного разобраться в этом вопросе.

Например, из теоремы Эйлера трудно вывести, что если все грани выпуклого многогранника суть треугольники, причем в некоторых вершинах они сходятся по шесть, а во всех остальных по пять граней, то вершин, в которых сходятся пять граней, будет ровно двенадцать. Естественно спросить, а сколько при этом у многогранника вершин, в которых встречается шесть многоугольников. Канадский математик Бранко Грюнбаум обнаружил, что при тех же предположениях число вершин, в которых встречается шесть треугольных граней, может быть любым, кроме единицы.

### Правильные многогранники и теорема Эйлера

Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках на-

<sup>3</sup> Вообще говоря, теорема о кривизне многогранника справедлива не только для выпуклых многогранников, но и для невыпуклых многогранников, гомеоморфных сфере.

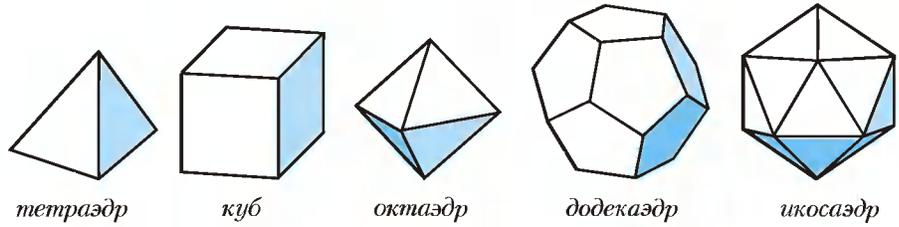


Рис.6

ходится в трактате Платона (427–347 до н.э.) «Тимаус». Поэтому правильные многогранники также называются платоновыми телами (хотя известны они были задолго до Платона). Каждый из правильных многогранников, а всего их пять (рис.6), Платон ассоциировал с четырьмя «земными» элементами: земля (куб), вода (икосаэдр), огонь (тетраэдр), воздух (октаэдр), а также с «неземным» элементом – небом (додекаэдр). Знаменитый математик и астроном Кеплер построил модель Солнечной системы как ряд последовательно вписанных и описанных правильных многогранников и сфер.

Имеется несколько эквивалентных определений правильных многогранников. Одно из них звучит так: многогранник называется правильным, если существуют три концентрические сферы, одна из которых касается всех граней многогранника, другая касается всех его ребер и третья содержит все его вершины (определение А). Это определение напоминает одно из возможных определений правильного многоугольника: многоугольник называется правильным, если он вписан в некоторую окружность и описан около другой окружности, причем эти окружности концентричны.

Мы воспользуемся другим определением: правильным многогранником называется такой выпуклый многогранник, все грани которого суть одинаковые правильные многоугольники и все двугранные углы попарно равны (определение В).

#### Упражнения

4. Докажите эквивалентность определений А и В.

5. Покажите, что в случае правильного многогранника требование существования лишь двух сфер, вписанной и описанной, и их концентричности недостаточно (постройте пример неправильного многогранника, для которого существуют концентрические вписанная и описанная сферы).

Обратим внимание на замечательное обстоятельство. Если правильные многоугольники существуют с любым числом сторон  $n \geq 3$ , то правильных многогранников (с точностью до подобия) всего пять и число граней у них равно 4, 6, 8, 12 или 20. Докажем это.

Обозначим через  $p$  число сторон у грани правильного многогранника. Так как двугранные углы равны, то все пространственные углы в правильном многограннике также равны. Поэтому в каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число граней, которое мы обозначим через  $q$ .

Используя правильность граней и равенство двугранных углов, древние греки легко получили, что для правильных многогранников пары целых чисел  $(p, q)$  могут быть лишь такими:  $(3, 3)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(5, 3)$ . Однако благодаря теореме Эйлера мы можем получить те же пять пар чисел не только для правильных многоугольников, но и вообще для произвольных выпуклых многогранников, у которых каждая грань имеет одинаковое число  $p$  сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число  $q$  граней.

Действительно, так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, а каждая грань имеет ровно  $p$  ребер, то  $p \cdot G$  равно удвоенному числу ребер в многограннике:  $p \cdot G = 2P$ . Поскольку каждое ребро имеет ровно два конца, а в каждой вершине сходится ровно  $q$  ребер, то  $q \cdot B = 2P$ . Итак, мы имеем

$$G = \frac{2P}{p} \text{ и } B = \frac{2P}{q}. \quad (4)$$

Подставим соотношения (4) в формулу Эйлера:

$$\frac{2P}{q} + \frac{2P}{p} = P + 2. \quad (5)$$

Найдем  $P$  из (5):

$$P = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}. \quad (6)$$

Знаменатель дроби в (6) равен  $4 - (p-2)(q-2)$ . А так как знаменатель положителен, то  $(p-2)(q-2) < 4$ . С другой стороны, как число  $p$  сторон у грани, так и число  $q$  граней, сходящихся в вершине, не меньше 3. Поэтому нетрудно проверить, что уравнение (5) при условии  $p \geq 3$ ,  $q \geq 3$  имеет пять и только пять целочисленных решений  $(p, q)$ :  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 5)$  и  $(5, 3)$ .

Отсюда следует, что комбинаторно различных многогранников, у которых все грани одноименные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней, не более пяти.

Вернемся теперь к правильным многогранникам. Соответствующая правильному многограннику пара чисел  $(p, q)$  называется его символом Шлефли. Мы показали, что у правильного многогранника может быть один из пяти символов Шлефли. Проверим теперь, что для каждого из символов Шлефли существует правильный многогранник.

Легко проверить, что символу Шлефли  $(3, 3)$  соответствует правильный тетраэдр, а символу  $(4, 3)$  – куб. К многограннику с символом Шлефли  $(3, 4)$  – октаэдру – легко прийти от куба. Нужно взять центры квадратных граней куба – их шесть. На каждой тройке центров граней, прилегающих к каждой из 8 вершин куба, построим по правильному треугольнику (рис.7). Легко проверить, что все двугранные углы между гранями равны. Этот многогранник правильный. Он имеет восемь граней и называется *октаэдром*.

Несколько сложнее убедиться в существовании правильного многогранника, соответствующего символу  $(3, 5)$ , т.е. многогранника с треугольными гранями, сходящимися по пять в каждой вершине. Возьмем три равных *золотых* прямоугольни-

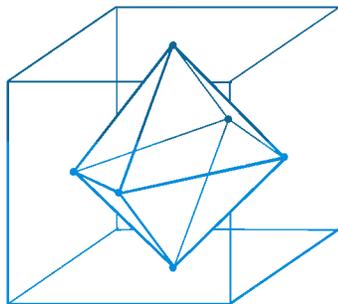


Рис.7

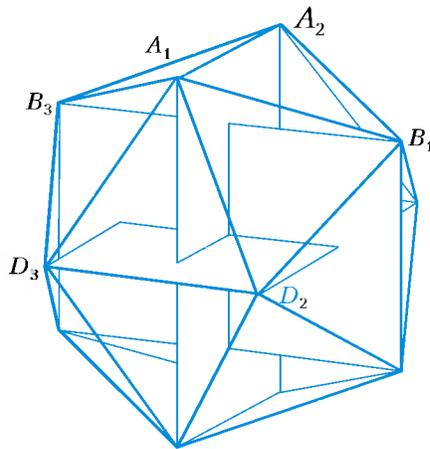


Рис.8

ка, т.е. прямоугольника с соотношением сторон  $(\sqrt{5} + 1):2$ . Расположим их во взаимно перпендикулярных плоскостях, как показано на рисунке 8. Пусть стороны золотых прямоугольников для определенности равны  $\sqrt{5} + 1$  и 2. Возьмем произвольную вершину  $A_1$  одного из прямоугольников. Легко проверить, что существует в точности пять вершин этих прямоугольников, а именно вершины  $B_1, A_2, B_3, D_3, D_2$  находящиеся от  $A_1$  на одинаковом расстоянии 2. По теореме Пифагора легко установить, что треугольники  $A_1B_1A_2$ ,  $A_1A_2B_3$ ,  $A_1B_3D_3$ ,  $A_1D_3D_2$ ,  $A_1D_2B_1$  правильные. Кроме того, нетрудно убедиться, что любые два смежных треугольника образуют равные двугранные углы. Точно такие правильные треугольники появляются во всех 12 вершинах прямоугольников, по пять в каждой. Таким образом, существует правильный многогранник, соответствующий символу  $(3, 5)$ . Этот многогранник называется *икосаэдром*, что в переводе с греческого означает двадцатигранник (см. рис. 6). У икосаэдра 12 вершин.

Чтобы построить правильный многогранник с символом  $(5, 3)$ , возьмем в качестве вершин этого многогранника центры всех двадцати треугольных граней икосаэдра. Центры пяти треугольников, сходящихся в той или иной вершине икосаэдра, образуют вершины плоского правильного пятиугольника. Всего таких пятиугольников столько же, сколько вершин у икосаэдра – двенадцать. Эти правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине (в центре треугольной гра-

ни икосаэдра), образуют двенадцатигранник – *додекаэдр* (см. рис.6). Легко проверить, что все двугранные углы у этого додекаэдра равны. Поэтому этот многогранник является правильным.

Читатель мог заметить, что два правильных многогранника – октаэдр и додекаэдр – строились при помощи других многогранников – куба и икосаэдра. Причем каждая вершина, скажем, октаэдра соответствовала некоторой грани куба, в то время как грань октаэдра соответствовала некоторой вершине куба. Точно то же самое можно сказать и о паре многогранников икосаэдр–додекаэдр.

Два многогранника называются *дуальными*, если между множеством граней одного из них и множеством вершин другого существует взаимно однозначное соответствие, причем такое, что если две грани первого из них смежны по ребру, то соответствующие этим граням вершины второго многогранника соединяются ребром. Подчеркнем, что у пары дуальных многогранников число вершин одного равно числу граней другого, а ребер у них поровну.

В конце предыдущего параграфа мы рассматривали многогранники лишь с треугольными гранями, сходящимися в каждой вершине по шесть или пять. Дуальные к ним многогранники состоят лишь из пяти- и шестиугольников, причем в каждой вершине сходятся по три грани. Такие многогранники называются *фуллеренами*<sup>4</sup>. Изучение фуллеренов очень важно для приложений в химии, медицине, архитектуре. Теорема Грюнбаума в переводе на язык фуллеренов означает, что во всяком фуллерене имеется в точности двенадцать пятиугольников, а шестиугольников может быть какое угодно число, не меньшее двух.

Чрезвычайно важная задача – как перечислить всевозможные структуры фуллеренов с наперед заданным числом  $n$  шестиугольников и сколько их в зависимости от  $n$  – остается актуальной и по сей день.

<sup>4</sup> Название происходит от имени знаменитого американского архитектора Р.Фуллера, который впервые начал применять такие многогранные формы, а также дуальные им для построения купольных сооружений.

# Закон Менделеева

А. ВАСИЛЬЕВ

**В** ОДА И КАМЕНЬ, ЛЕД И ПЛАМЕНЬ – примерно таковы были представления мыслителей древности об окружающих нас стихиях, материалах и образующих их элементах. В этом поэтическом перечне содержатся два состояния известного химического соединения, неведомый минерал и результат бурной реакции окисления какой-то органики. По мере развития цивилизации все больше предметов различного происхождения включались в повседневный обиход, при этом некоторые камни, попадая в огонь, растекались как вода, а при охлаждении превращались в полезные металлы. Так человечество вступило в бронзовый, а затем в железный век, причем освоение новых элементов знаменовало качественные изменения в жизни людей.

Когда римский император Диоклетиан (III в.) приказал уничтожить все книги по обработке золота, серебра и меди, чтобы предотвратить изготовление фальшивых монет, на первое место в поиске новых веществ вышла алхимия. Благодаря усилиям алхимиков число известных химических элементов к началу XIX

века достигло двух десятков, так что их уже можно было как-то классифицировать. Первая таблица элементов, расположенных в порядке возрастания их атомных весов, была составлена английским химиком и физиком Дальтоном в 1803 году. В этой таблице он впервые ввел обозначения атомов в виде кружков с точками, линиями или буквами внутри, но они не получили широкого распространения.

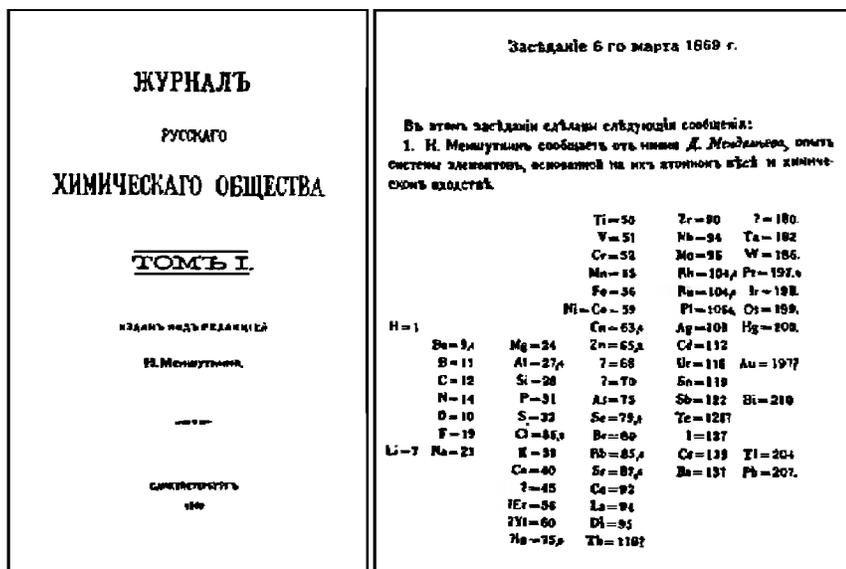
Классификация исключительно важна в точных науках, поскольку позволяет выделять какие-то общие тенденции в любом рассматриваемом семействе и систематизировать представителей этого семейства по каким-то признакам. Например, сходство между литием, натрием и калием, между хлором, бромом и йодом или между кальцием, стронцием и барием проявлялось во всех химических реакциях этих элементов, однако этого сходства оказывалось недостаточно для построения гармоничной, внутренне согласованной таблицы элементов.

Попытки систематизации химических элементов по их разнообразным свойствам предпринимались многи-

ми исследователями. Французский химик Дюма еще в начале XIX века отмечал важность соотношения атомных весов (сегодня более правильно говорить – атомных масс) родственных элементов. Так, атомный вес натрия Na равен полусумме атомных весов лития Li и калия K, причем важную роль в соотношении их весов играет цифра 8. В самом деле, атомный вес Li равен 7, Na –  $23 = 7 + (8 \cdot 2)$ , K –  $39 = 7 + (8 \cdot 4)$ . Эта цифра действительно, как оказалось позже, не случайна. В 1853 году английский химик Гладстоун обратил внимание на то, что некоторые элементы с близкими атомными весами сходны по химическим свойствам. Таковы, например, осмий Os, иридий Ir и платина Pt, а также железо Fe, кобальт Co и никель Ni. Отметим, что для многих других элементов близость атомных весов вовсе не означает химического родства, так что отмеченная Гладстоуном особенность указывала на существование некоторых особых семейств химических элементов. Немецкий химик Петтенкофер в середине XIX века отмечал важное значение не только числа 8 в соотношении атомных весов родственных элементов, но и числа 18. И этот факт впоследствии нашел естественно-научное объяснение.

Все эти находки и подмеченные закономерности оказались очень важными для построения системы элементов, однако решающий шаг в этом направлении был сделан Дмитрием Ивановичем Менделеевым (1834–1907) в 1869 году. При составлении своей периодической системы он учел не только атомный вес, но и «индивидуальность» каждого сорта атомов, которая проявляется в их способности к образованию химических соединений.

Если бы атомы характеризовались всегда одной и той же валентностью, то задача их систематизации была бы существенно проще – следовало бы разбить все имеющиеся элементы



на группы с постоянной валентностью и в пределах каждой группы расположить их по весу. Однако многие химические элементы в различных соединениях демонстрируют различные валентности. Примером этому могут служить соединения азота и кислорода  $N_2O$ ,  $NO$ ,  $N_2O_3$ ,  $NO_2$ ,  $N_2O_5$ , в ряду которых валентность азота повышается от 1 до 5. Принцип расположения элементов в порядке возрастания их атомного веса также мог приводить к ошибочным результатам с точки зрения современной науки. Каждый химический элемент может существовать в нескольких вариантах – изотопах, различающихся массой атомного ядра. У некоторых элементов число стабильных и радиоактивных изотопов измеряется десятками. Кроме того, вглядываясь в периодическую систему элементов, можно заметить, что расположение  $Co$  и  $Ni$ ,  $Te$  и  $I$  не соответствует принципу возрастания атомного веса.

Проблему поливалентности химических элементов Менделеев решил тем, что стал располагать их по принципу наибольшей валентности. Так, галогены хлор  $Cl$ , бром  $Br$  и йод  $I$  имеют максимальную валентность по кислороду, равную 7, т.е. могут образовывать соединения типа  $Cl_2O_7$ ; халькогены сера  $S$ , селен  $Se$  и теллур  $Te$  имеют максимальную валентность по кислороду 6, т.е. могут образовывать соединения типа  $SO_3$ ; и так далее. Результатом такой классификации стал «вертикальный» вариант периодической системы, в котором наряду с принципом возрастания атомного веса был использован принцип периодической повторяемости свойств химических элементов по мере возрастания их атомного веса.

Неожиданные пробелы в этом плавном нарастании массы при периодической повторяемости химических свойств вынудили Менделеева поставить в первом варианте периодической системы ряд вопросительных знаков, которые впоследствии были заменены на вновь открытые элементы скандий  $Sc$ , галлий  $Ga$ , германий  $Ge$  и гафний  $Hf$ . Открытие этих элементов произошло еще при жизни великого химика (за исключением  $Hf$ , открытого в 1923 году).

Для построения периодической системы, наряду с глубоким пониманием современной химии, требовал-

ся также дар научного предвидения. Практически точно расположив все известные ему элементы, а таковых было уже более шестидесяти, Менделеев намного опередил свое время. Он, по сути, расположил элементы в соответствии со строгими законами сформулированной намного позже квантовой механики. Из этих законов вытекает периодическая повторяемость свойств химических элементов по мере нарастания атомного номера.

С точки зрения современной науки, атомы всех химических элементов образованы элементарными частицами трех видов. Ядро атома состоит из положительно заряженных протонов и электрически нейтральных нейтронов. Изотопами одного и того же химического элемента являются атомы, содержащие одно и то же количество протонов и разное количество нейтронов. Вокруг ядра, на расстояниях в десятки тысяч раз превышающих его радиус, вращаются отрицательно заряженные электроны. Их число равно числу протонов в ядре. Электроны атома располагаются вокруг ядра, подчиняясь определенным закономерностям. Согласно принципу Паули, сформулированному лишь в 1925 году, в одном и том же атоме не может быть двух электронов, находящихся в одинаковых квантовых состояниях.

Квантовые состояния электронов в атоме определяются четырьмя квантовыми числами. Первое из них, главное квантовое число  $n$ , описывает среднее удаление электрона от ядра. Второе (орбитальное) квантовое число  $l$  определяет форму электронной орбитали, третье (магнитное) квантовое число  $m_l$  – ориентацию этой орбитали. Наконец, четвертое (спиновое) квантовое число  $m_s$  характеризует спин электрона, который может принимать два значения:  $+1/2$  и  $-1/2$ . Возможные значения второго и третьего квантовых чисел зависят от значения главного квантового числа:  $l$  может принимать значения  $0, 1, \dots, n - 1$ , а  $m_l$  может принимать значения  $0, \pm 1, \dots, \pm l$ . Если  $n = 1$ , то возможны 2 различных квантовых состояния в атоме, отвечающие нахождению электронов на сферически симметричной орбитали с  $l = 0$  и  $m_l = 0$ . Если  $n = 2$ , то существует 8 различных квантовых состояний, при  $n = 3$  имеется 18 различных квантовых

состояний, и т.д. в соответствии с формулой  $2n^2$ .

Энергия электрона в ядре зависит от первых двух квантовых чисел, и, поскольку поведение электрона в основном определяется его энергией, для описания электронных состояний обычно используется запись в виде цифры и следующей за ней буквы – цифра совпадает с главным квантовым числом, а значения  $0, 1, 2, 3$  для второго квантового числа обозначаются буквами  $s, p, d, f$ . (Эти обозначения ведут свое происхождение от названий четырех типов спектральных линий:  $s$  – sharp (резкие),  $p$  – principal (основные),  $d$  – diffuse (диффузные),  $f$  – fundamental (фундаментальные).)

В атомах, где частично или полностью заполнена лишь 1s-оболочка, возможно размещение одного или двух электронов, чему соответствуют самые легкие химические элементы: водород  $H$  и гелий  $He$ . Гелий и другие благородные газы, обладающие замкнутыми электронными оболочками, в химические реакции не вступают и при построении периодической системы Менделеевым не рассматривались. Во втором ряду располагаются 8 химических элементов от лития  $Li$  до неона  $Ne$ , отвечающих заполнению 2s- и 2p-оболочек. Этот ряд содержит химические элементы, образующие основу органических соединений: углерод  $C$ , азот  $N$ , кислород  $O$ . Следующие 3s-, 3p-, и 3d-оболочки могут быть заполнены 18 электронами. Первыми членами этого ряда служат натрий  $Na$  и магний  $Mg$ , заполнение 3p-оболочки начинается с алюминия  $Al$  и заканчивается в благородном аргоне  $Ar$ , а затем вместо заполнения 3d-оболочки в калии  $K$  и кальции  $Ca$  заполняется 4s-оболочка.

Нарушение порядка заполнения электронных оболочек в соответствии с их главным квантовым числом  $n$  отражает факт зависимости энергии электронов от орбитального числа  $l$ . Лишь после заполнения 4s-оболочки начинает застраиваться 3d-оболочка, и этот процесс затрагивает металлы от скандия  $Sc$  до меди  $Cu$ . Полное заполнение 3d-оболочки достигается в цинке  $Zn$ , а затем от галлия  $Ga$  до криптона  $Kr$  заполняется 4p-оболочка. В соответствии с формулой  $2n^2$  в четвертой оболочке можно разместить 32 электрона, т.е. в дополнение к двум 4s-электронам и шести

4p-электронам найдут себе место еще десять 4d-электронов и четырнадцать 4f-электронов.

В многоэлектронных атомах, однако, порядок заполнения электронных оболочек еще более усложняется. Общая схема расположения энергетических уровней электронов в атомах периодической системы такова:

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s,$$

$$4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, 7s, 5f.$$

Элементы, в которых заполняются 3d-, 4d- и 5d-оболочки, называются переходными металлами; элементы с незаполненной 4f-оболочкой называются лантанидами, а с незаполненной 5f-оболочкой – актинидами.

Несмотря на всю строгость законов квантовой механики, эта наука не в состоянии рассчитать энергию многоэлектронного атома, и поэтому приведенную выше схему расположения энергетических уровней от 1s до 5f следует рассматривать как эм-

пирический факт. В то же время квантовая механика объясняет, например, почему свойства элементов, расположенных друг над другом в пределах одной колонки, столь близки между собой. Так, в колонке щелочных металлов химические элементы имеют лишь по одному электрону на внешней s-оболочке, и в большинстве химических соединений они одновалентны. Упомянутая выше переменная валентность азота определяется числом электронов на 2s- и 2p-оболочках, участвующих в реакции с кислородом. Близость свойств переходных металлов, содержащих разное число электронов на внутренних, не целиком заполненных оболочках, объясняется тем, что в химических реакциях они часто участвуют лишь электронами внешних s-оболочек. «Магические» числа 8 и 18 соответствуют суммарному числу электронов на s- и p- или s-, p- и d-оболочках. Зная расположение электронов по оболочкам, можно понять свойства не только отдельных эле-

ментов, но и предсказать, как они поведут себя в различных химических соединениях.

Открытие периодического закона явилось, выражаясь современным языком, моментом истины в истории естествознания. Тогда, разумеется, не было ясных представлений о рядах лантанидов и актиноидов, о радиоактивных элементах и благородных газах. Элементы казались незыблемыми кирпичиками мироздания, а электроны, о распределении которых по оболочкам столько написано выше, были открыты лишь в 1897 году. Теперь, когда все клеточки периодической системы заполнены и идет лишь поиск новых трансураниевых соединений, видно, что удивительная гармония природы проявляется как в систематическом изменении физических и химических свойств элементов в пределах каждого ряда, так и в близости этих свойств в пределах каждой колонки.

# Лайнус Полинг

## (к столетию со дня рождения)

*Р. СВИРИДОВА*

**Л**АЙНУС КАРЛ ПОЛИНГ относится к блестящей плеяде ученых, становление которых пришлось на начало XX века – время бурного развития квантовой механики, квантовой химии, рентгеноструктурного анализа, обусловивших открытие основных закономерностей микромира. Более тысячи книг и статей Полинга посвящены структурной, аналитической и квантовой химии, биохимии, теоретической и прикладной медицине.

Лайнус Полинг родился в Портленде (штат Оригона, США) 28 февраля 1901 года. Его отец и дед были фармацевтами. В 1922 году он окончил Оригонский сельскохозяйственный колледж со степенью бакалавра по химической технологии и продолжил учебу в Калифорнийском технологическом институте, пос-

ле окончания которого ему присвоили докторскую степень по химии и степень бакалавра по математической физике. В этом институте он проработал 42 года, в 1931 году став профессором института, а с 1937 года – деканом факультета химии и химической технологии. В 1933 году Полинг был избран действительным членом Национальной академии наук США.

Уже в юношеские годы Полинг публикует одну из первых научных работ по структурной кристаллографии – структуре молибденита. Следуя работам В. Гайтлера и Ф. Лондона, давшим первое квантово-механическое объяснение химическим связям, Полинг развивает эти представления. Ряд его работ посвящен квантово-механическому описанию природы ионной и ковалентной свя-

зи, симметрии молекул и кристаллов. Как можно оценить тенденцию атома к образованию ионной или ковалентной связи? Какова доля ионной связи в ионно-ковалентных соединениях? Ответы на эти и подобные вопросы можно найти в работах Полинга. А составленные им таблицы ионных радиусов и величин, определяющих характер и энергию образования валентных связей, использовались при решении многих задач химии и структурной кристаллографии.

Проблемами структурной кристаллографии Полинг начал заниматься еще в 20-е годы. С открытием рентгеновских лучей (1895 г.) и дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке (1912 г.) появилась возможность экспериментально определять внутреннее строение кристаллов. Оказалось, что расположение ионов, атомов, молекул в кристалле подчиняется строгим законам и что структура кристаллов может соответствовать одной из 230 пространственных групп симметрии, математически выведенных еще в XIX веке Е.С. Федоровым и А. Шёнфлисом. Фундаментом, на основании которого разрабатывалась теория внутреннего строения кристаллов, были работы Л. Брэгга, Л. Полинга и Н.В. Белова.

Образуя симметричную пространственную решетку, частицы кристалла (атомы, ионы и др.) располагаются на определенных расстояниях друг от друга. Если считать частицы несжимаемыми шарами, то структуру можно представить как плотнейшую упаковку этих шаров, размер которых определяется кристаллохимическими радиусами. Первые расчеты ионных радиусов были проведены Л.Брэггом и В.Гольдшмитом. Существенный вклад в определение этих величин был сделан Полингом.

В ионных кристаллах наибольшими размерами, как правило, обладают анионы – отрицательно заряженные ионы ( $\text{Cl}^-$ ,  $\text{F}^-$ ,  $\text{O}^{2-}$  и др.), при плотнейшей упаковке которых остаются пустоты, частично заполняемые катионами – положительно заряженными ионами ( $\text{Al}^{3+}$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Cr}^{3+}$  и др.). Если центры анионов, окружающих катион, соединить прямыми линиями, получится многогранник, в центре которого расположен катион, а в вершинах находятся анионы. Значительная роль в создании теории плотнейших шаровых упаковок, являющихся ключом к расшифровке структуры кристаллов, принадлежит Л.Полингу и Н.В.Белову, предложившим модели многогранников (тетраэдров, октаэдров, кубов, додекаэдров и др.), с помощью которых можно наглядно представить необычайно разнообразные структурные узоры, создаваемые природой.

Модели многогранников Полинга–Белова – кирпичи мироздания минералогического мира. С помощью этих моделей было определено внутреннее строение многих кристаллов, в том числе и очень сложные структуры наиболее распространенных в земной коре минералов – силикатов. Размеры, симметрия и пространственная ориентация этих многогранников определяют особенности химических и физических свойств кристаллов. Кроме неорганических кристаллов, Полинг исследовал структуры веществ биологического происхождения. Ряд его работ посвящен проблемам биохимии, в частности химии иммунитета и структуре белков.

Итогом многочисленных исследований в области химии и структурной кристаллографии была опубликованная в 1939 году книга Л.По-



Н.В.Белов, Л.Полинг и Э.Полинг (1957 г.)

линга «Природа химической связи и структура молекул и кристаллов».

Важные открытия сделаны Полингом и в области теоретической и прикладной медицины. В 30-е годы он изучает кислородный обмен гемоглобина, природу иммунной системы человека, в 50–60 годы занимается биохимией психических заболеваний и задержки развития, лечения заболеваний с использованием больших доз витамина С. Одной из основных проблем возникновения многих болезней, в том числе и старения организма, является проблема оксидантов (окислителей, которые находятся как внутри организма, так и во внешней среде, воздействующей на него). Полинг пришел к выводу, что витамин С является одним из лучших антиоксидантов. Он создал ряд новых препаратов, содержащих большие дозы витамина С, которые укрепляют нервную и иммунную системы. Они нашли широкое применение при лечении простудных и сердечно-сосудистых заболеваний, атеросклероза и др. В 1971 году была издана его книга «Рак и витамин С». Наблюдения показали, что введение больших доз витамина С больному раком улучшает его состояние.

За исследования в области химии и структуры молекул и кристаллов, в частности за открытие атомной структуры многих балков, Лайнусу Полингу присуждена Нобелевская премия по химии (1954 г.).

Полинг был избран почетным членом более 50 университетов и академий мира, он лауреат многих наград

в области химии, биологии, медицины.

После окончания второй мировой войны народы всего мира требовали запрещения атомного оружия, прекращения гонки вооружений, урегулирования международных проблем мирным путем. Активное участие в движении сторонников мира принимал Л.Полинг – с 1946 года он являлся членом «Комитета озабоченных ученых», которым руководил А.Эйнштейн. В 1955 году Л.Полинг вместе с 55 Нобелевскими лауреатами подписал декларацию, призывающую прекратить все войны. В 1957–58 годах вместе со своей неизменной спутницей жизни женой Эйвой Хелен Полинг он распространял воззвание, подписанное 11000 ученых из 49 стран мира, которое было направлено в ООН. В 1958 году была опубликована его книга «Больше никаких войн». Правительство, активно проводившее политику гонки вооружений, испытания ядерного и водородного оружия, резко осудило миротворческую деятельность Полинга. Он был лишен возможности выезжать за пределы страны, пришлось оставить кафедру, на которой он проработал более 40 лет. Но мировая общественность высоко оценила его борьбу за мир – в 1962 году он был награжден Нобелевской премией мира, которую получил в 1963 году. В этом же году ядерные державы США, СССР и Великобритания подписали соглашение о запрете испытаний ядерного оружия в атмосфере.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1786» или «Ф1793». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1786 предлагалась на московском отборе на XXVII Всероссийскую математическую олимпиаду, задачи М1792–М1794 – на самой этой олимпиаде.

Задачи Ф1793, Ф1797 и Ф1801 предлагались в этом году на Московской физической олимпиаде, а задачи Ф1795 и Ф1798 – на XXXV Всероссийской физической олимпиаде.

## Задачи М1786–М1795, Ф1793–Ф1802

**М1786.** На плоскости отмечено шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причем все попарные расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках найдутся два треугольника с общей стороной такой, что для одного эта сторона является наибольшей, а для другого – наименьшей.

*С. Рукшин*

**М1787\*.** Пусть  $p$  и  $q$  – натуральные числа, большие 1. Известно, что  $q^3 - 1$  делится на  $p$ , а  $p - 1$  делится на  $q$ . Докажите, что  $p = q^{3/2} + 1$  или  $p = q^2 + q + 1$ .

*Н. Осипов*

**М1788.** В треугольнике  $ABC$  точка  $I$  – центр вписанной окружности,  $A', B', C'$  – точки ее касания со сторонами  $BC, CA, AB$  (рис.1). Прямые  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $P$ ,  $AC$  и  $A'C'$  – в точке  $M$ ,  $BC$  и  $B'C'$  – в точке  $N$ . Докажите, что прямые  $IP$  и  $MN$  перпендикулярны.

*А. Заславский*

**М1789.** а) Из ста гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 100 г выбирается набор в 50 гирек, общая масса которых равна общей массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 50 г. Докажите, что в

наборе найдутся две гирьки, общая масса которых равна 101 г.

б) Из двухсот гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г выделяется набор в 100 гирек, общая масса которых равна массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 100 г и не дают вместе 201 г. Докажите, что 50 минимальных гирек набора составляют вместе 2525 г.

*В. Произволов*

**М1790.** Имеются в некотором количестве равносторонние треугольники, у каждого из которых одна сторона желтая, другая красная, а третья синяя. Можно прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами или участками одноцветных сторон. Таким образом составлен большой равносторонний треугольник  $\Delta$ .

Докажите, что суммарная длина участков границы треугольника  $\Delta$  каждого из трех цветов одна и та же.

*С. Волченков*

**М1791.** а) На плоскости расположены 5 окружностей, любые четыре из которых имеют общую касательную. Обязательно ли все 5 окружностей имеют общую касательную?

б) На плоскости расположены  $n$  окружностей, любые 5 из которых имеют общую касательную. Докажите, что все  $n$  окружностей имеют общую касательную.

*В. Произволов*

**М1792.** В компании из  $2n + 1$  человек для любых  $n$  человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

*С. Берлов*

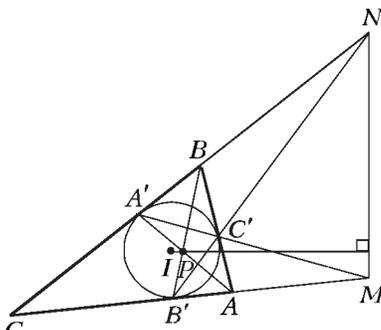


Рис.1

**М1793\***. В магическом квадрате  $n \times n$ , составленном из чисел  $1, 2, \dots, n^2$ , центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (Магическим называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)

*И. Богданов*

**М1794.** На прямой выбрано 100 множеств  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ , каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$  является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков. (Точка также считается отрезком.)

*Р. Карасев*

**М1795.** На сфере  $S$  определена непрерывная функция  $y = f(X)$ ,  $X \in S$ . Докажите, что найдется такое значение  $y_0$ , которое функция  $f$  принимает на каждой большой окружности сферы  $S$ . (Окружность на сфере является большой, если ее центр совпадает с центром сферы.)

*В. Произволов*

**Ф1793.** Снаряд вылетел из ствола орудия под углом  $\alpha = 3^\circ$  со скоростью  $v = 10000$  м/с. Оцените, на каком расстоянии  $L$  от орудия он упадет на Землю. Сопротивлением воздуха и вращением Земли при расчете пренебречь.

*А. Андрианов*

**Ф1794.** По гладкой горизонтальной поверхности скользит гантелька – легкий жесткий стержень длиной  $L$ , на концах которого закреплены точечные массы  $M$  и  $2M$ . В некоторый момент скорость легкого конца равна по величине  $v$ , а скорость тяжелого конца в два раза больше. Какой может быть сила натяжения стержня при движении гантельки?

*З. Рафаилов*

**Ф1795.** Центр тяжести спортивного автомобиля находится на равных расстояниях от передних и задних колес. Если при торможении зажимать колодками только задние колеса, то длина тормозного пути оказывается  $L_1$ , если только передние – то  $L_2$  (при той же начальной скорости автомобиля). Найдите длину тормозного пути в том случае, когда колодками зажимают и передние и задние колеса.

*В. Слободянин*

**Ф1796.** На гладком горизонтальном столе находится куб из пенопласта массой  $M = 40$  г. В него попадает ледяная пуля массой  $m = 10$  г, летящая перед ударом горизонтально со скоростью  $v = 100$  м/с. Должно быть, у пули центр тяжести был смещенным – она вылетела через верхнюю грань куба, причем канал на выходе при осмотре оказался перпендикулярным верхней плоскости куба. Пуля после вылета не долетела до потолка. Считая начальные температуры пули и куба равными  $0^\circ\text{C}$ , оцените массу растаявшего льда.

*А. Простов*

**Ф1797.** В сосуд, заполненный воздухом под давлением  $p_0 = 1$  атм при температуре  $t_0 = -23^\circ\text{C}$ , поместили маленькую льдинку, после чего герметично его закрыли.

Затем сосуд нагрели до температуры  $t_1 = 227^\circ\text{C}$ , и оказалось, что давление в нем повысилось до  $p_1 = 3$  атм. Какова будет относительная влажность воздуха в сосуде после его охлаждения до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ?

*М. Семенов*

**Ф1798.** Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли обрывок рукописи, на котором был изображен замкнутый цикл для  $\nu = 1$  моль гелия в координатах  $p, V$  (рис.2). Цикл состоял из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1. КПД данного цикла  $\eta = 0,125$ . Масштаб по оси объема: 1 дел = 0,5 л, по оси давления: 1 дел =  $5 \cdot 10^3$  Па. Найдите объем газа в изохорическом процессе. На рисунке ось давления вертикальна, а ось объема горизонтальна.

*А. Шеронов*

Рис.2

**Ф1799.** Два очень длинных параллельных медных проводника расположены на расстоянии 1 м друг от друга. Они соединены перемычками из такого же провода, причем соседние перемычки составляют углы  $60^\circ$  друг с другом и с проводами (рис.2). Считая сопротивление 1 метра провода равным 1 Ом, найдите сопротивление, измеренное между точками А и Б.

*М. Учителев*

**Ф1800.** Параллельный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C$  и катушки индуктивностью  $L$  (рис.4). Последовательно с контуром включен конденсатор емкостью  $2C$ . К концам получившейся цепочки в некоторый момент подключают батарейку напряжением  $U_0$ . Найдите максимальное значение силы тока через катушку и максимальное напряжение на конденсаторе емкостью  $C$ . Сопротивление проводов невелико, элементы цепи можно считать идеальными.

*А. Зильберман*

**Ф1801.** Два груза массой  $m$  каждый подвешены к горизонтальному потолку с помощью двух невесомых и нерастяжимых нитей длиной  $l_1$  и  $l_2$  соответственно (рис.5). Грузы соеди-

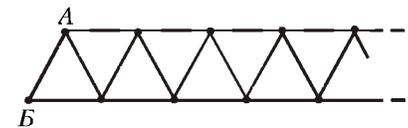
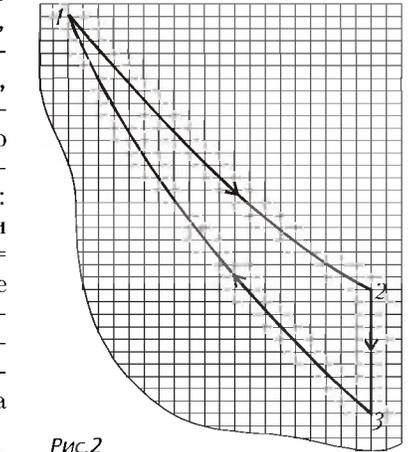


Рис.3

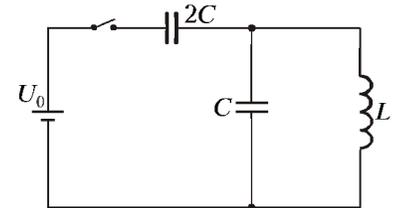


Рис.4

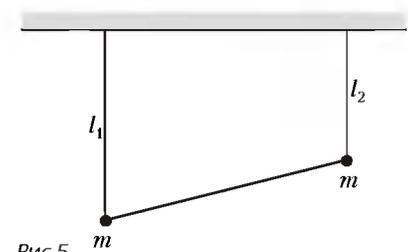


Рис.5

нены легким жестким стержнем. В положении равновесия нити вертикальны. Определите период малых колебаний системы в плоскости рисунка.

*Р.Компанеев*

**Ф1802.** Фотографию Буратино – вид спереди, расстояние до аппарата 1 м – делают при помощи простого фотоаппарата с фокусным расстоянием объектива 5 см. На фотографии глаза оказались точно «в фокусе», а вот кончик носа получился размытым. До какого диаметра нужно задиафрагмировать объектив, чтобы сделать четкой всю фотографию? У Буратино нос «морковкой», он перпендикулярен плоскости лица и имеет длину 30 см. На упаковке пленки загадочная надпись: «400 линий на миллиметр».

*Р.Александров*

**Решения задач M1766–M1770,  
Ф1778–Ф1787**

**M1766.** На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Может ли ферзь ходить так, чтобы король рано или поздно наверняка попал под шах?

**Ответ:** может. Вот один из способов движения ферзя – делать все ходы на одну клетку по диагонали, двигаясь при этом по такой разворачивающейся спирали: 1 ход вправо-вверх, затем 10 ходов вправо-вниз, 100 ходов влево-вниз, 1000 ходов влево-вверх, 10000 ходов вправо-вверх и т.д. Докажем, что где бы ни был король вначале, рано или поздно ферзь окажется с ним на одной горизонтали или вертикали. Введем прямоугольную систему координат с единицей, равной стороне клетки. Расположим оси так, чтобы все центры клеток имели целые координаты (координаты центра будем называть координатами клетки), ферзь стоял в начале координат, а король оказался в некоторой точке  $(x, y)$  с обеими положительными координатами.

Заметим, что каждым ходом каждая из координат фигур меняется не более чем на 1. Обе координаты ферзя вначале меньше соответствующих координат короля. Если в какой-то момент хотя бы одна из координат ферзя станет больше, чем у короля, то (по принципу дискретной непрерывности) эти координаты в какой-то промежуточный момент были равны, т.е. король и ферзь стояли на одной горизонтали или вертикали, и король был под шахом.

Скажем, что ферзь сделал ход в правильном направлении, если обе его координаты увеличились. (Из каждых четырех серий ходов подряд ферзь одну серию делает в правильном направлении, сам того не подозревая.) Оценим координаты ферзя и короля после того, как ферзь сделает серию из  $10^k$  ходов в правильном направлении, где  $10^k > 5(x + y)$ . Всего к этому моменту ферзь сделает  $n = 10^k + \underbrace{11\dots11}_k$  ходов, и так как  $\underbrace{11\dots11}_k < 0,2 \cdot 10^k$ , то  $n < 1,2 \cdot 10^k$ . Даже если все ходы до этой серии уменьшали его координаты, все равно обе координаты будут больше  $(1 - 0,2) \cdot 10^k = 0,8 \cdot 10^k$ . Сумма координат короля вначале была  $x + y < 0,2 \cdot 10^k$ . Каждым ходом король меняет эту сумму ровно на 1 (ходов по диагонали нет!). За  $n$  ходов сумма его координат увеличилась не более чем на  $n$ ,

поэтому она не превосходит  $1,4 \cdot 10^k$ . Следовательно, меньшая из координат не превосходит  $0,7 \cdot 10^k$ , т.е. меньше, чем у ферзя. А из этого уже следует утверждение задачи.

Так как король невидим для ферзя, то игра остановится по знаку судьбы, когда он увидит, что шах произошел.

*А.Шаповалов*

**M1767.** Внутри квадрата ABCD расположены точки P и Q так, что  $\angle PAQ = \angle PCQ = 45^\circ$ . Докажите, что  $PQ^2 = BP^2 + QD^2$  (рис.1).

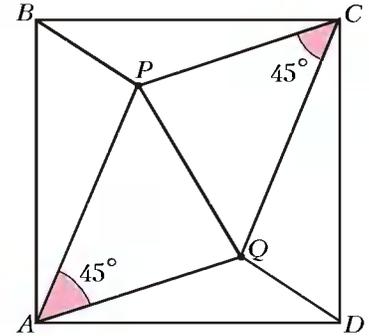


Рис.1

Симметрично отразим  $\triangle APB$  относительно прямой AP, а  $\triangle AQD$  – относительно прямой AQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку M (рис.2). Затем симметрично отразим  $\triangle CPB$  относительно прямой CP, а треугольник CQD – относительно прямой CQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку N.

Заметим, что  $\angle PMQ + \angle QNP = 180^\circ$ , но так как треугольники PMQ и QNP равны, то  $\angle PMQ = \angle QNP$ , т.е.  $\angle PMQ = 90^\circ$ .

Значит, треугольник PMQ прямоугольный и  $PM^2 + QM^2 = PQ^2$ . Но  $PM = BP$ , а  $QM = QD$ , поэтому окончательно можно утверждать, что  $BP^2 + QD^2 = PQ^2$ .

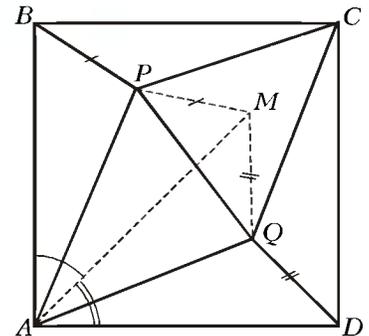


Рис.2

*В.Произволов*

**M1768.** а) Расположите числа 1, 2, 3, ..., 100 в строку в таком порядке, чтобы для любых нескольких (но не всех) из этих чисел сумма номеров занятых ими мест не совпадала с суммой самих этих чисел.

б\*) При посадке в аэробус пассажиры сели кто куда захотел. В итоге все места оказались заняты, а для любой группы, в которой не более ста пассажиров, среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест более чем на единицу отличается от среднего арифметического номеров мест, указанных в их билетах. Каково наименьшее возможное число мест в этом аэробусе?

а) Укажем два способа: 100, 1, 2, ..., 97, 98, 99 и 2, 3, 4, ..., 99, 100, 1. Каждый из них дает требуемое расположение чисел, в чем легко непосредственно убедиться.

б) **Ответ:** 301 место.

Каждый пассажир включен в один из циклов вида  $P_1 P_2 \dots P_m$ , где  $P_1, P_2, \dots, P_m$  – некоторые пассажиры, причем  $P_i$ -й пассажир ( $i = 1, 2, \dots, m - 1$ ) имеет билет на место, которое занимает  $P_{i+1}$ -й пассажир, а  $P_m$ -й пассажир – на место, которое занимает  $P_1$ -й пассажир. Если в таком цикле 100 пассажиров или менее, то все они могли составить одну рассматриваемую группу, для которой

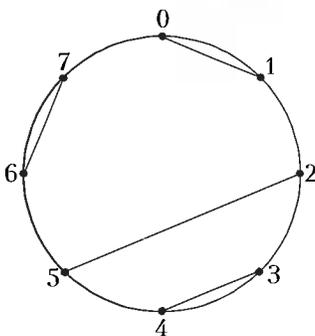
среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест равно среднему арифметическому номеров мест, указанных в их билетах, что противоречит условию. Поэтому  $m \geq 101$ . Значит, если число циклов не меньше 3, то в автобусе размещаются 303 или более пассажиров. Заметим далее, что если  $P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+r}$  – цепочка пассажиров, последовательно включенных в некоторый цикл, причем номера билетов  $P_k$ -го и  $P_{k+r}$ -го отличаются на 1, то  $r \geq 101$ . Рассматривая цепочку  $P_{k+r}, P_{k+r+1}, \dots, P_m, P_1, \dots, P_k$ , получим неравенство  $m - (k+r) + k \geq 101$ . Следовательно,  $m \geq 101 + r \geq 202$ , и поэтому число мест в автобусе может быть меньшим, чем 303, только если выполняется одно из следующих условий:

- 1) все пассажиры включены в один цикл;
- 2) число циклов равно 2, причем любые два билета на соседние (по номерам) места принадлежат пассажирам из разных циклов.

Пусть выполнено первое условие. Рассмотрим пассажиров  $A_n, A_{n+1}$  и  $A_{n+2}$  с билетами на  $n$ -е,  $(n+1)$ -е и  $(n+2)$ -е места соответственно. Между  $A_n$ -м и  $A_{n+1}$ -м пассажирами в кратчайшей из цепочек, их соединяющих, имеется не менее 100 пассажиров, между  $A_{n+1}$ -м и  $A_{n+2}$ -м также не менее 100 пассажиров, а между  $A_{n+2}$ -м и  $A_n$ -м либо нет ни одного пассажира, либо имеется не менее 100. Значит, если общее число мест меньше 303, то либо  $A_n$  сидит на  $(n+2)$ -м месте, либо  $A_{n+2}$  сидит на  $n$ -м месте. Ввиду произвольности номера  $n$  имеем (с точностью до направления) цикл  $A_1 A_3 A_5 \dots A_N A_2 A_4 \dots A_{N'}$ , где  $N$  и  $N'$  – наибольший нечетный и наибольший четный номера соответственно, а  $A_i$  – пассажир, занимающий  $i$ -е место,  $i = 1, 2, \dots, \max(N, N')$ . Пассажиры, сидящие на местах  $N, 2, 4, \dots, 198$ , имеют билеты на места  $2, 4, 6, \dots, 200$ , а разность соответствующих средних равна  $(N - 200):100$ . Так как эта разность больше 1, получаем  $N \geq 301$ . Нетрудно убедиться, что цикл  $A_1 A_3 A_5 \dots A_{301} A_2 A_4 \dots A_{300}$  удовлетворяет условиям задачи. Пусть теперь выполнено второе условие, т.е. имеются два цикла, каждый из которых включает всех пассажиров с билетами на места одной четности. Если в каком-нибудь из этих циклов пассажир  $A_n$  сидит не на  $(n+2)$ -м месте, а  $A_{n+2}$  – не на  $n$ -м месте, то в цикле не менее 202 пассажира, а в автобусе – не менее 403 мест. В противном же случае имеем (с точностью до направления) цикл  $A_1 A_3 A_5 \dots A_N$ , где пассажиры с билетами на места  $1, 3, 5, \dots, 199$  сидят на местах  $N, 1, 3, \dots, 197$ ; разность соответствующих средних арифметических  $(N - 199):100$  больше 1, откуда  $N \geq 301$ .

С.Токарев

**M1769\***. Концы  $2n$  непересекающихся хорд разделили окружность на  $4n$  равных дуг. Докажите, что среди этих хорд найдутся две параллельные хорды.



Будем считать, что окружность имеет длину  $4n$ , а, значит, каждая из  $4n$  дуг, на которые она разделена концами  $2n$  непересекающихся хорд, имеет длину 1. Важно заметить следующее. Так как хорды не пересекаются, то концы каждой хорды разделяют окружность на дуги нечетной длины. Обозначим  $4n$  точек деле-

ния числами  $0, 1, 2, \dots, 4n - 1$  последовательно (см. рисунок). Условимся писать  $a \equiv b$ , если числа  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $4n$ , и говорить, что  $a$  и  $b$  равны по модулю  $4n$ . Теперь отметим, что если  $i, j$  и  $k, l$  – две пары из чисел на окружности, для которых выполняется равенство  $i + j \equiv k + l$ , то хорды  $ij$  и  $kl$  параллельны.

Каждая из  $2n$  хорд определена парой своих концов:  $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{4n-1}, i_{4n})$ . При этом сумма чисел в каждой паре нечетна.

Допустим, что среди  $2n$  хорд нет параллельных. Тогда набор чисел  $i_1 + i_2, i_3 + i_4, \dots, i_{4n-1} + i_{4n}$  по модулю  $4n$  содержит все нечетные числа от 1 до  $4n - 1$ .

Значит, сумма чисел этого набора равна  $4n^2$  (по модулю  $4n$ ). Непосредственно суммируя числа набора, мы получим

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \dots + i_{4n-1} + i_{4n} = 0 + 1 + 2 + \dots + 4n - 1 = 2n(4n - 1).$$

Но тогда должно выполняться равенство  $4n^2 \equiv 2n(4n - 1)$ . Легко видеть, что такое равенство не выполняется, т.е. остается заключить, что среди хорд есть параллельные.

В.Произволов

**M1770.** Дан многочлен степени 10 с буквенными коэффициентами. Двое поочередно заменяют какую-нибудь букву на число, пока не заменят все буквы. Обозначим полученный многочлен  $A(x)$ . Пусть  $a_1 = \max A(x)$  при  $x$  от  $-1$  до  $0$ ,  $a_2 = \max A(x)$  при  $x$  от  $0$  до  $+1$ . Если  $a_1 > a_2$ , то выиграл первый игрок, если  $a_1 < a_2$ , то второй. Кто победит при правильной игре?

Результат игры в основном определяется тем, кто выберет последний коэффициент при нечетной степени. Это будет первый игрок, который может гарантировать свой выигрыш. Говорить о выигрыше пока рано: может быть, за счет выбора коэффициентов при четных степенях второму игроку удастся добиться, чтобы  $\max A(x)$  при  $x$  от  $-1$  до  $+1$  был бы при  $x = 0$  ( $a_1 = a_2$  – ничья). Однако если первый игрок сразу выберет коэффициент при первой степени равным единице, то он гарантирует, что максимума в нуле нет, так как производная не равна нулю.

Затем правильным назначением последнего коэффициента при нечетной степени (это будет достаточно большое по модулю число) первый игрок решительно склонит «чашу весов» в свою сторону. Он обеспечит себе победу независимо от возможных последующих назначений коэффициентов при четных степенях.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

**Ф1778.** Человек, стоящий на большом расстоянии  $h$  от длинной ровной стены, освещает ее лучом фонарика, вращая фонарик в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Как зависит от времени скорость светового пятна, бегущего по стене, с точки зрения этого человека? Нарисуйте график этой зависимости.

Вначале найдем, чему равна скорость зайчика в точке  $B$  (рис. 1) с точки зрения наблюдателя, находящегося в этой же точке. Из рисунка видно, что  $v = \omega r / \cos \alpha$ . Поскольку  $\cos \alpha = h/r$ ,

$$v = \frac{\omega(h^2 + x^2)}{h}.$$

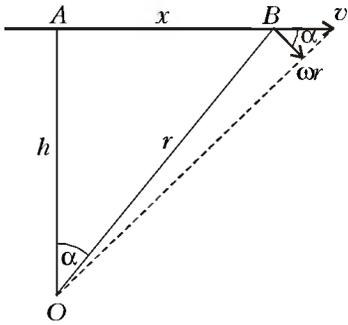


Рис.1

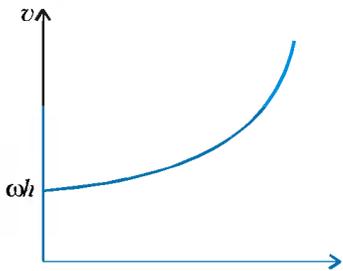


Рис.2

Нарисуем качественно график зависимости  $v(x)$ . Из рисунка 2 следует, что при  $t \rightarrow \infty$  (т.е. при  $x \rightarrow \infty$ )  $v \rightarrow \infty$ , т.е. в мгновенной сопутствующей системе отсчета скорость зайчика может быть сколь угодно большой. Это ничему не противоречит. Дело в том, что при движении зайчика не происходит перемещения какого-либо материального объекта из одной точки стены в соседнюю: смещение зайчика вызвано приходом в соседнюю точку стены новой порции световой энергии от прожектора. Разберемся с этим подробнее.

Если прожектор, находящийся в точке  $O$ , вращается в одной плоскости, то к моменту, когда свет, испущенный в направлении точки  $A$ , достигнет точки  $D$  (рис.3,а), прожектор будет светить в

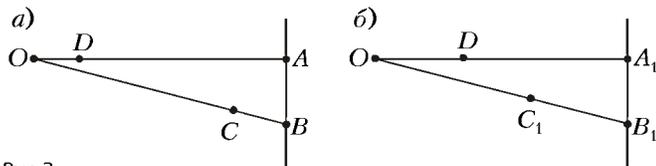


Рис.3

направлении точки  $B$  (свет распространяется, естественно, прямолинейно). Поэтому к тому моменту, когда свет дойдет из точки  $D$  в точку  $A$ , свет, испущенный позднее в направлении точки  $B$ , достигнет точки  $C$  ( $DA = OC$ ). А еще через некоторое время свет достигнет точки  $B$ . Если стена далеко, то  $AB > CB$ , т.е. скорость движения зайчика больше скорости света (сравните со случаем близко расположенной стены (см. рис.3,б), когда  $DA_1 = OC_1$  и  $A_1B_1 < C_1B_1$ ).

Из-за конечности скорости распространения света  $c$  наблюдатель, находящийся в точке  $O$ , будет видеть зайчик не там, где световое пятно находится в момент наблюдения, а в другой точке – там, где зайчик находился в более ранний момент времени. Примем за ноль отсчета времени момент, когда фонарик испустил свет в направлении  $OA$  (см. рис.1). Если в момент времени  $t$  фонарик испустил свет в направлении  $OB$  (под углом  $\alpha = \omega t$ ), то зайчик в точке  $B$  с координатой

$$x = h \operatorname{tg} \omega t \quad (1)$$

наблюдатель увидит, из-за запаздывания света, в момент времени

$$t_1 = t + \frac{2h}{c \cos \omega t}. \quad (2)$$

Для нахождения скорости зайчика воспользуемся равенством

$$v = \frac{dx}{dt_1} = \frac{dx/dt}{dt_1/dt}. \quad (3)$$

Поскольку

$$dx/dt = h\omega / \cos^2 \omega t, \quad dt_1/dt = 1 + 2h\omega \sin \omega t / (c \cos^2 \omega t),$$

то

$$v = \frac{ch\omega}{c \cos^2 \omega t + 2h\omega \sin \omega t}. \quad (4)$$

Из выражения (4) видно, что при  $t \rightarrow \pi/(2\omega)$  скорость зайчика  $v \approx c/(2 \sin \omega t) \rightarrow c/2$ . Интересно исследовать ответ при  $t < 0$  (отрицательное значение времени отвечает изменению угла  $\alpha$  от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ ). При  $t \rightarrow -\pi/(2\omega)$  из выражения (4) получается странный результат:  $v \rightarrow -c/2$ . На первый взгляд это бессмыслица. Действительно, луч света, посланный в момент времени  $t = -\pi/(2\omega)$ , пойдет параллельно стене, но не достигнет ее никогда, т.е. зайчика наблюдатель никогда не увидит. Кстати, из равенства (1) следует, что при  $t \rightarrow -\pi/(2\omega)$   $t_1 \rightarrow \infty$ . Но ведь фонарик вращается, и рано или поздно наблюдатель должен в первый раз увидеть зайчик. Найдем этот момент времени, обозначив его  $t_2$ . Очевидно, что  $t_2$  – минимальное возможное значение времени  $t_1$ , определяемое выражением (2). Вычислим производную  $dt_1/dt$  и приравняем ее нулю:

$$1 + \frac{2h\omega \sin \omega t}{c \cos^2 \omega t} = 0. \quad (5)$$

Решая это уравнение, получаем

$$\sin \omega t = \frac{h\omega}{c} - \sqrt{1 + \left(\frac{h\omega}{c}\right)^2}. \quad (6)$$

Подставив это выражение в формулы (2) и (1), можно найти тот момент времени  $t_2$ , когда наблюдатель впервые увидит пятно света в точке с координатой

$$x_2 = -h \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (c/(h\omega))^2} - 1}{2}}.$$

В последующие моменты времени наблюдатель будет видеть свет, отраженный стеной как правее, так и левее этой точки, т.е. наблюдатель будет видеть два зайчика, движущихся в противоположные стороны. Другими словами, выражение (2) при  $t_1 > t_2$  имеет 2 корня: каждому  $t_1$  отвечают 2 значения  $t$ . Зависимость  $t_1(t)$  качественно изображена на рисунке 4.

Подставляя равенство (5) в выражение (4), видим, что скорость обоих зайчиков в момент времени  $t_2$  равна бесконечности! Тем самым становится понятным «нелепый» результат предельного перехода при  $t \rightarrow -\pi/(2\omega)$ : при  $t_1 \rightarrow \infty$  зайчик, бегущий в сторону, противоположную направлению вращения фонарика, имеет скорость  $v \rightarrow -c/2$ .

Явно  $v$  через  $t_1$  из уравнений (4) и (2) не выражается: зависимость  $v(t_1)$  задана через параметр  $t$ . Для построения качественного графика зависимости  $v(t_1)$  построим

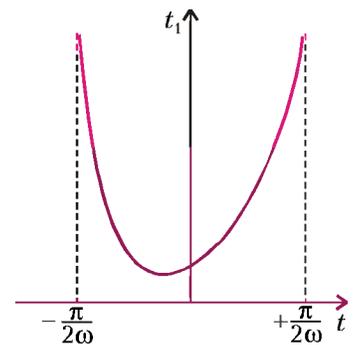


Рис.4

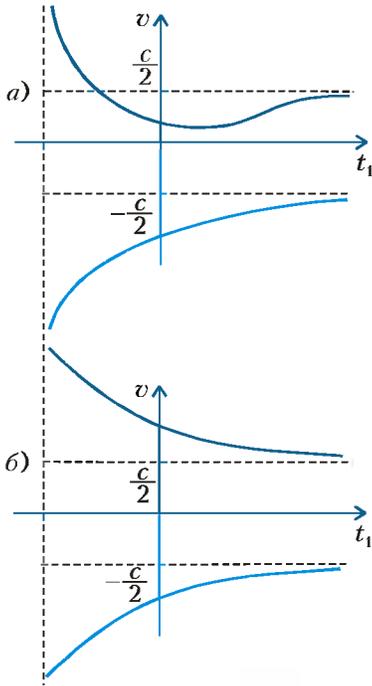
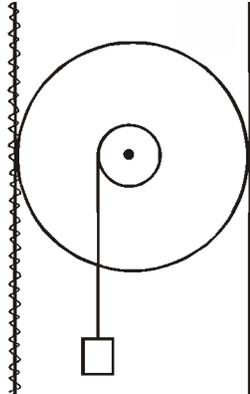


Рис.5

— расположены на расстоянии  $D$  друг от друга (см. рисунок). Между ними помещена катушка с внешним диаметром  $D$ , вся масса  $M$  которой сосредоточена в ее оси. Катушка зажата пластинами так, что может двигаться вниз вращаясь, но не проскальзывая относительно шероховатой пластины.



На внутренний цилиндр катушки диаметром  $d$  намотана легкая нить, к которой привязан груз массой  $m$ . Найдите ускорение этого груза.

Проскальзывания в точке контакта с шероховатой платиной нет; следовательно, тепло не выделяется. Тогда можно воспользоваться законом сохранения механической энергии.

Найдем связь между скоростью оси катушки и скоростью груза.

Для малого угла  $\varphi$  поворота катушки (относительно точки касания с шероховатой пластиной) смещение оси катушки составит

$$\Delta H = \frac{D}{2} \varphi.$$

На внутреннюю часть наматывается при этом участок нити длиной  $(d/2)\varphi$ . С учетом такого укорочения нити смещение груза будет равно

$$\Delta h = \frac{D}{2} \varphi - \frac{d}{2} \varphi = \frac{D-d}{2} \varphi.$$

Видно, что отношение смещений оси катушки и груза получается все время одинаковым — таким же будет отношение их скоростей и ускорений.

Обозначим ускорение оси  $a$ , тогда ускорение груза будет  $a(D-d)/D$ . Будем считать ускорение  $a$  постоянным, в этом случае за время  $\tau$  от начала движения ось катушки опустится на  $a\tau^2/2$  и наберет скорость  $a\tau$ . Для груза,

качественные графики зависимостей  $v(t)$  и  $t_1(t)$  при  $-\pi/(2\omega) \leq t \leq \pi/(2\omega)$ , а затем сравним соответствующие моменты времени. Обратите внимание на то, что при  $\hbar\omega < c$  и  $\hbar\omega > c$  графики  $v(t_1)$  выглядят по-разному (см. рис.5,а и 5,б).

В качестве упражнения читателям предлагается самостоятельно найти минимальную скорость зайчика при  $\hbar\omega < c$ : она равна  $\hbar\omega / (1 + (\hbar\omega/c)^2)$ .

В.Шелест

**Ф1779.** Две вертикальные параллельные пластины — одна совершенно гладкая, другая очень шероховатая

соответственно, смещение будет  $a(1-d/D)\tau^2/2$ , а скорость  $a(1-d/D)\tau$ . Из энергетических соображений запишем

$$Mg \frac{a\tau^2}{2} + mg \frac{a(1-d/D)\tau^2}{2} = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{m(a(1-d/D)\tau)^2}{2}.$$

Отсюда находим ускорение оси катушки:

$$a = g \frac{M + m(1-d/D)}{M + m(1-d/D)^2}$$

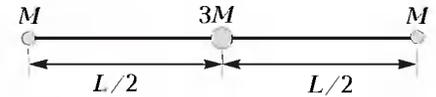
и ускорение груза:

$$a_{\text{гр}} = g \left(1 - \frac{d}{D}\right) \frac{M + m(1-d/D)}{M + m(1-d/D)^2}.$$

З.Рафаилов

**Ф1780.** В глубоком космосе, вдали от всех тяготеющих масс, находятся три тела малых размеров, массы которых  $M$ ,  $M$  и  $3M$ . Как они могут двигаться, чтобы расстояния между любыми двумя телами оставались все время постоянными и не превышали по величине  $L$ ?

Из условия видно, что каждое из тел должно вращаться по окружности вокруг общего центра масс, который может двигаться прямолинейно и равномерно (или покоиться). Из симметрии понятно, что тела должны находиться в вершинах равнобедренного треугольника, при этом должны выполняться условия для суммарных сил — их направления «смотрят» в центр масс, а величины соответствуют равномерному вращению каждого из тел. Первое условие для сил выполняется для двух конфигураций тел — равносторонний треугольник и «три тела в линию». Второе условие выполняется только для линейной конфигурации.



(Проверьте оба утверждения самостоятельно.)

Итак (см. рисунок): большое тело имеет нулевое ускорение, а для одного из малых тел суммарная сила равна

$$F = G \frac{M \cdot 3M}{(L/2)^2} + G \frac{M \cdot M}{L^2} = 13G \frac{M^2}{L^2}.$$

Тогда из уравнения

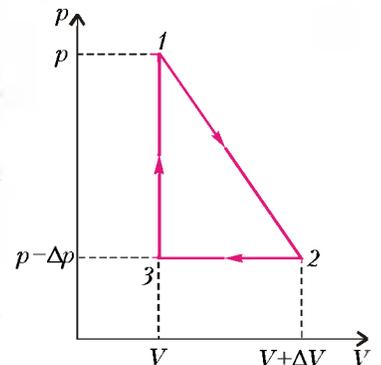
$$F = M\omega^2 \frac{L}{2}$$

находим частоту вращения:

$$\omega = \sqrt{\frac{26GM}{L^3}}.$$

Р.Александров

**Ф1781.** Порция гелия в циклическом процессе вначале адиабатически расширяется, при этом температура газа уменьшается от 500 К до 499 К, затем сжимается изобарически до первоначального объема и, наконец, нагревается изохорически до первоначальной температуры. Найдите наименьшее значение температуры в этом цикле, а также КПД цикла.



Процесс изображается на  $pV$ -диаграмме (см. рисунок) в виде очень маленького прямоугольного треугольника (гипотенуза — не совсем прямая, но отличие от кривой невелико). На участке 1–2 (адиабата)

$$\Delta U_{12} = -A_{12}, \quad \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R(T_2 - T_1), \quad A_{12} = p\Delta V.$$

Для состояния 1

$$pV = \nu RT_1,$$

для состояния 2

$$(p - \Delta p)(V + \Delta V) = \nu RT_2.$$

Отсюда получаем

$$p\Delta V = 1,5\nu R\Delta T, \quad V\Delta p = 2,5\nu R\Delta T,$$

где  $\Delta T = T_1 - T_2 = 1$  К. Тогда в состоянии 3

$$(p - \Delta p)V = \nu RT_3, \text{ и}$$

$$T_3 = \frac{pV}{\nu R} - \frac{V\Delta p}{\nu R} = T_1 - 2,5\Delta T = 497,5 \text{ К.}$$

Это и есть минимальная температура в этом цикле. Найдем теперь КПД цикла. Газ получает тепло только на участке 3–1. В этом случае

$$Q = \Delta U_{31} = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_3).$$

Работа в цикле находится по площади треугольника:

$$A = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V.$$

Тогда КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{0,5\Delta p\Delta V}{1,5\nu R \cdot 2,5\Delta T} = \frac{0,5 \cdot p\Delta V \cdot V\Delta p}{1,5\nu R \cdot 2,5\Delta T \cdot pV} = \frac{0,5 \cdot 1,5\nu R\Delta T \cdot 2,5\nu R\Delta T}{1,5\nu R \cdot 2,5\Delta T \cdot \nu RT_1} = \frac{0,5\Delta T}{T_1} = \frac{1}{1000} = 0,1\%.$$

3. Циклов

**Ф1782.** В упрощенной модели гимназии школьники изображаются цилиндрами одной и той же высоты. Площадь зала для отдыха гимназистов на перемене составляет  $200 \text{ м}^2$ . На этой площади хаотически расположены 100 десятиклассников диаметром  $0,5 \text{ м}$  каждый; они практически неподвижны. Пятиклассник половинного диаметра бежит по залу со скоростью  $3 \text{ м/с}$ . Натыкаясь на десятиклассника, он набивает себе шишку, но после отражения продолжает свое движение. Оцените, сколько шишек он себе набивает за перемену длительностью  $15 \text{ минут}$ .

Общая «площадь» старшеклассников составляет  $N \cdot \pi D^2/4 \approx 20 \text{ м}^2$ . Это существенно меньше площади зала, поэтому «длина свободного пробега» гимназиста получается достаточно большой (по сравнению с размерами цилиндров). Далее применим обычное рассуждение: чтобы удар произошел, центр неподвижного цилиндра должен находиться от линии движения не дальше чем на  $(D+d)/2$ . Тогда «заметаемая» за время  $\tau$  площадь равна  $v_0\tau \cdot 2(D+d)/2 = v_0\tau(D+d)$ . На этой площади произойдет

$$N \cdot \frac{v_0\tau(D+d)}{S} = 100 \cdot \frac{3 \cdot 15 \cdot 60 \cdot (0,5 + 0,25)}{200} \approx 1000$$

ударов. Ясно, что ответ приближенный, но считать точнее просто не имеет смысла — модель расчета довольно грубая.

М.Учителев

**Ф1783.** Два одинаковых точечных заряда  $Q$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Какой потенциал может иметь эквипотенциальная поверхность, если она охватывает оба заряда? Какой потенциал должна иметь такая поверхность, чтобы быть всюду выпуклой?

Первый вопрос довольно простой. Ясно, что эквипотенциальные поверхности высокого потенциала (около зарядов) охватывают каждый из зарядов «по отдельности». Критической точкой будет середина отрезка, соединяющего заряды, т.е. точка  $A$  (рис.1). Потенциал этой точки равен

$$\Phi_A = 2k \frac{Q}{0,5d} = 4k \frac{Q}{d}.$$

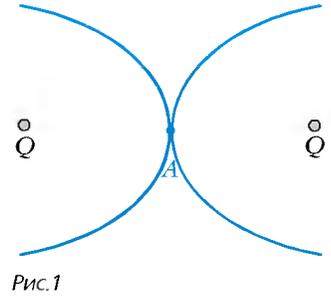


Рис.1

Поверхности меньшего потенциала должны охватывать оба заряда.

Разберемся теперь со вторым вопросом. Рассмотрим точку  $B$  на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему заряды (рис.2).

Ясно, что направление поля в точке  $B$  совпадает с направлением этого перпендикуляра. Отойдём теперь на малое расстояние  $x$  параллельно линии  $QQ$  — в точку  $V$ . Если эквипотенциальная поверхность в точке  $B$  выпуклая (точка  $B$  — это «критическая» точка), то потенциал в точке  $V$  должен быть меньше, чем в точке  $B$ . Для нахождения «крайней» поверхности эти потенциалы нужно приравнять. В этом случае полная напряженность в точке  $V$  должна быть параллельна  $AB$  (и в точках между  $B$  и  $V$  тоже). Так будет, если составляющая напряженности вдоль линии  $QQ$  не будет зависеть от  $x$ . Отсюда получаем

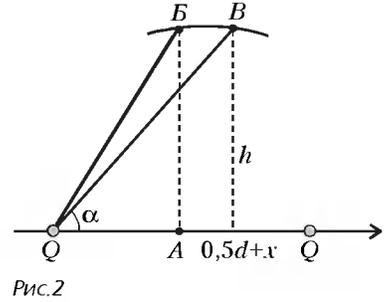


Рис.2

$$E_{\parallel} = E \cos \alpha =$$

$$= k \frac{Q}{h^2 + (0,5d + x)^2} \frac{0,5d + x}{\sqrt{h^2 + (0,5d + x)^2}} = \text{const}.$$

Для малых  $x$  (а нас именно такие  $x$  и интересуют) выражение можно упростить:

$$E_{\parallel} = \frac{kQ \cdot 0,5d \left(1 + \frac{2x}{d}\right)}{\left(h^2 + (0,5d)^2\right)^{3/2} \left(1 + \frac{dx}{h^2 + 0,25d^2}\right)^{3/2}} = \frac{kQ \cdot 0,5d}{\left(h^2 + (0,5d)^2\right)^{3/2}} \frac{1 + \frac{2x}{d}}{1 + \frac{1,5dx}{h^2 + 0,25d^2}}.$$

Ясно, что для выполнения нашего условия нужно следующее:

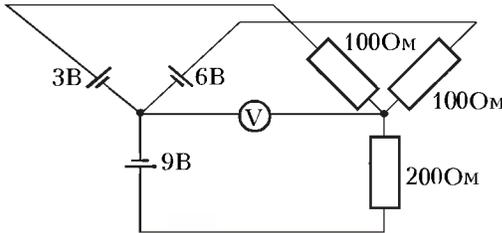
$$\frac{2}{d} = \frac{1,5d}{h^2 + 0,25d^2}, \text{ или } 2h^2 = d^2.$$

При этом потенциал выпуклой поверхности будет равен

$$\Phi_B = 2k \frac{Q}{\sqrt{h^2 + d^2/4}} = \frac{4k}{\sqrt{3}} \frac{Q}{d} = \frac{\Phi_A}{\sqrt{3}}.$$

С.Кротов

**Ф1784.** Батареи напряжением 3 В, 6 В и 9 В соединены «минусами», а положительные их выводы свободны — такое соединение называют «звездой». К ним подключают «звезду» из резисторов сопротивлениями 100 Ом, 100 Ом и 200 Ом, как показано на рисунке.



Что покажет вольтметр с большим сопротивлением, если его включить между общими точками «звезд»? Заменяем вольтметр амперметром, имеющим очень малое сопротивление. Что он покажет? Заменяем амперметр резистором, имеющим сопротивление 17 Ом. Какой ток через него потечет?

Будем измерять все потенциалы относительно левой точки соединения — обозначим ее  $A$  (т.е. примем точку  $A$  за «нулевую»). Для случая с идеальным вольтметром все просто: пусть он покажет  $U$ , тогда потенциал второй точки соединения — точки  $B$  — равен  $+U$ , и можно выразить токи через резисторы, учитывая, что сумма вытекающих токов равна сумме вытекающих токов. Будем считать все токи вытекающими — это вполне можно делать, просто какие-то токи окажутся при этом отрицательными. Получаем уравнение для определения  $U$ :

$$\frac{U_1 - U}{R_1} + \frac{U_2 - U}{R_2} + \frac{U_3 - U}{R_3} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{3 - U}{100} + \frac{6 - U}{100} + \frac{9 - U}{200} = 0,$$

откуда  $U = 5,4$  В.

Для случая с идеальным амперметром все тоже просто: потенциал точки  $B$  оказывается нулевым, тогда показание амперметра будет

$$I = \frac{U_1 - 0}{R_1} + \frac{U_2 - 0}{R_2} + \frac{U_3 - 0}{R_3} = 0,135 \text{ А.}$$

Для случая с резистором сопротивлением  $R$ : обозначим потенциал точки  $B$  буквой  $\Phi$ , тогда

$$\frac{U_1 - \Phi}{R_1} + \frac{U_2 - \Phi}{R_2} + \frac{U_3 - \Phi}{R_3} = \frac{\Phi - 0}{R}.$$

Отсюда

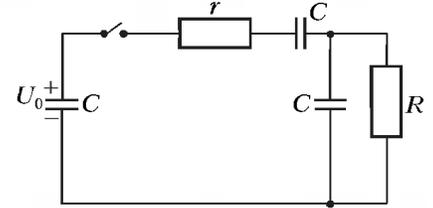
$$\Phi \approx 1,6 \text{ В,}$$

и через резистор течет ток

$$I_R = \frac{\Phi}{R} \approx 0,095 \text{ А.}$$

Р.Схемов

**Ф1785.** Три одинаковых конденсатора емкостью  $C = 1000$  мкФ каждый, ключ и два резистора сопротивлениями  $r = 10$  Ом и  $R = 10$  кОм собраны в схему, приведенную на рисунке. Один из конденсаторов заряжен до напряжения  $U_0$ . Замкнем ключ. Какое количество теплоты выделится за первую секунду в резисторе сопротивлением  $r$ ? Какое количество теплоты выделится в нем за последующие 100 секунд? Элементы цепи считать идеальными.



После замыкания ключа незаряженные вначале конденсаторы быстро (за несколько сотых долей секунды, поскольку так называемая постоянная времени равна  $\tau = rC = 0,01$  с) заряжаются до напряжения  $U/3$  каждый, через резистор сопротивлением  $R$  проходит за это время очень небольшой заряд, и мы им пренебрежем — как будто резистора  $R$  вообще нет. Тогда из баланса энергий найдем количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением  $r$  за первую секунду:

$$Q_1 = \frac{1}{2} C U_0^2 - \left( \frac{1}{2} C \cdot \left( \frac{2}{3} U_0 \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} C \cdot \left( \frac{1}{3} U_0 \right)^2 \right) = \frac{1}{6} C U_0^2.$$

За следующие 100 секунд конденсатор, к которому подключен резистор сопротивлением  $R$ , практически полностью разрядится, а первоначальный заряд  $C U_0$  распределится поровну между оставшимися двумя конденсаторами. Тогда полное выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q = \frac{1}{3} C U_0^2 - \frac{1}{4} C U_0^2 = \frac{1}{12} C U_0^2.$$

Часть этого тепла выделится в резисторе  $R$ , остальное — в резисторе  $r$ . Найдем эти доли. При разряде конденсаторов через резистор  $R$  по резистору  $r$  течет маленький ток, так что падением напряжения на  $r$  можно пренебречь — тогда напряжение на последовательно соединенных конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  практически равно напряжению на конденсаторе  $C_3$ . Это означает, что за то время, пока конденсатор  $C_3$  теряет заряд  $q$ , конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  отдадут  $q/2$ , а через резистор  $R$  при этом протекает заряд  $3q/2$ . Итак, ток через резистор  $r$  в любой момент в 3 раза меньше, чем через резистор  $R$ , поэтому отношение тепловых мощностей равно 1:9000. Таким образом, в резисторе  $r$  в течение второго промежутка времени выделится количество теплоты

$$Q_2 = \frac{(1/12) C U_0^2}{9001} \approx \frac{C U_0^2}{108000}.$$

А.Старов

**Ф1786.** На рисунке 1 приведена схема, собранная из катушки индуктивностью 1 Гн, конденсатора емкостью 1 мкФ, идеального амперметра и двух резисторов

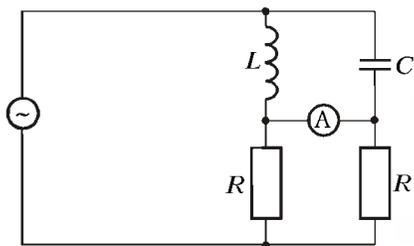


Рис.1

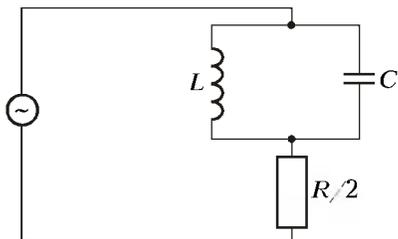


Рис.2

сопротивлениями по 100 Ом. Схема подключена к источнику переменного напряжения  $U = 100\cos 1000t$ . Найдите показание амперметра.

Перерисуем схему с учетом идеальности амперметра (рис.2). Простой расчет показывает, что параллельный контур настроен в резонанс — числа в условии соответствующим образом подобраны. У такого контура сопротивление очень велико, напряжение источника практически полностью приложено к контуру,

а напряжения (и токи) резисторов совсем малы. Тогда

$$I_L = \frac{U_0}{\omega L} = 0,1 \text{ А} \text{ и } I_C = \frac{U_0}{1/(\omega C)} = 0,1 \text{ А}.$$

Токи эти противоположны по фазе. Учитывая малость токов через резисторы, получим

$$I_A = I_L = I_C = 0,1 \text{ А}.$$

Но это — амплитудное значение, а амперметры обычно градуируют в расчете на действующие (эффективные) значения. Тогда показание амперметра таково:

$$I_a = \frac{I_A}{\sqrt{2}} \approx 0,07 \text{ А}.$$

З.Рафаилов

**Ф1787.** Плоская световая волна, ее длина волны 0,55 мкм соответствует зеленому цвету, падает перпендикулярно на плоский непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие. На расстоянии 0,2 м находится лист бумаги, расположенный параллельно экрану. При каком диаметре отверстия будет макси-

*Всем читателям журнала «Квант»! Срочно!*

*Спешим сообщить вам радостную новость. После большого перерыва возобновилась жизнь Библиотечки «Квант». Сформирована новая редакционная коллегия и прошло ее первое заседание.*

*Редколлегия и издательство «Бюро Квантум», взявшее на себя ответственность за выпуск книг серии «Библиотечка «Квант», полны решимости вернуть Библиотечке ее былую славу. Уже вышли в свет две первые книги, впереди - много интересных книг для любителей физики и математики.*

А теперь — более подробно.

У многих любителей физики и математики сохранились на полках отдельные книги популярной серии «Библиотечка «Квант». За 15 лет, начиная с 1980 года, вышли 85 книг этой серии. Среди них — книги о современных и классических достижениях физики и математики, написанные учеными, работающими на переднем крае науки, материалы различных олимпиад, книги по истории науки и многое другое. Большинство этих книг, несмотря на гигантские (по сегодняшним меркам) тиражи, давно стали библиографической редкостью.

На первом заседании редколлегии серии «Библиотечка «Квант» было отмечено, что прекращение на долгие годы выпуска книг этой серии имело негативные последствия для развития физико-математического образования в нашей стране. Регулярный выпуск книг Библиотечки снова будет способствовать живой связи между наукой и образованием, помогать талантливым школьникам развивать свои научные способности и интерес к науке; он должен вернуть всем ценителям интеллектуальных открытий непередаваемое ощущение увлекательного путешествия за знаниями.

В планах редколлегии и издательства как обновленное

издание лучших книг серии, дополненное (где это возможно и необходимо) сведениями о самых последних достижениях и открытиях, так и подготовка совершенно новых книг.

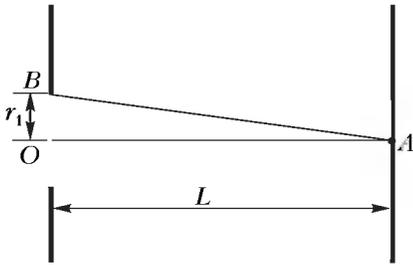
Уже поступили в продажу два свежих выпуска: выпуск 86 — обновленное издание замечательной книги И.Ш.Слободецкого и Л.Г.Асламазова «Задачи по физике» и выпуск 87 — сборник материалов под названием «Физика и ...», посвященный связи физики с разными областями науки и деятельности человека. В этом году читатели получают еще две книги — книгу А.В.Спивака «Математический праздник» и книгу П.В.Блиоха «Радиоволны на земле и в космосе». В последующие годы предполагается выпускать по 6 — 8 книг.

*Не упустите уникальную возможность приобрести вышедшие книги или сделать заказ на будущие книги серии «Библиотечка «Квант» прямо сегодня и непосредственно в помещении редакции. Завтра может быть уже поздно. Особенно приглашаются к сотрудничеству (на выгодных условиях) оптовые покупатели.*

*Мы будем рады ответить на все ваши вопросы по телефонам: 930-36-32, 930-56-48, 930-56-41.*

мальной освещенность в самой близкой к центру отверстия точке листа бумаги? При каком диаметре отверстия будет максимальной освещенность этой точки одновременно для длин волн 0,4 мкм и 0,7 мкм?

Если понемногу увеличивать радиус отверстия  $r$ , начиная с очень малых значений, то освещенность в самой близкой



к центру отверстия точке листа — точке  $A$  — сначала будет увеличиваться. Однако начиная с некоторого значения  $r_1$  увеличение освещенности прекратится — это произойдет в тот момент, когда

разность хода лучей будет равна половине длины волны света (см. рисунок):

$$BA - OA = \frac{\lambda}{2}, \text{ т.е. } \sqrt{r_1^2 + L^2} - L = \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{или } L \left( 1 + \frac{r_1^2}{L^2} \right)^{1/2} - L = \frac{\lambda}{2}.$$

Учитывая, что  $r_1 \ll L$ , получим

$$\frac{r_1^2}{2L^2} = \frac{\lambda}{2}, \text{ и } r_1 = \sqrt{\lambda L} \approx 0,33 \text{ мм.}$$

При дальнейшем увеличении радиуса отверстия освещенность будет падать, потом снова расти, и т.д. В общем,

$n$ -й максимум наступает при радиусе отверстия

$$r_n = \sqrt{\lambda L(2n+1)}.$$

Теперь нужно подобрать такой радиус отверстия  $r$ , чтобы получить условие максимума для двух длин волн: 0,4 мкм и 0,7 мкм (очевидно — за счет разных номеров максимумов). Дело облегчается тем, что радиус можно брать довольно грубо приближенным — близкие к  $r_n$  части отверстия почти ничего не прибавляют к освещенности. Итак,

$$\sqrt{\lambda_1 L(2n_1+1)} \approx \sqrt{\lambda_2 L(2n_2+1)},$$

или

$$0,4(2n_1+1) \approx 0,7(2n_2+1).$$

Например,

$$0,4 \cdot 5 = 2 \approx 0,7 \cdot 3 = 2,1.$$

Тогда

$$r_{\lambda_1} = \sqrt{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 \cdot 5} \text{ м} \approx 0,63 \text{ мм,}$$

$$r_{\lambda_2} = \sqrt{0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 \cdot 3} \text{ м} \approx 0,65 \text{ мм,}$$

т.е.

$$r \approx 0,64 \text{ мм.}$$

Разумеется, искомые диаметры будут в 2 раза превышать найденные радиусы.

*А.Зильберман*

## Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2000 года

### I место заняли

по математике

Шабанов Александр — с. Садовое Воронежской обл., школа 1;

по физике

Однороженко Денис — г. Радужный Владимирской обл., школа 2.

### II место заняли

по математике

Нестерук Владимир — Украина, Киев, лицей «Научная смена»;

по физике

Ольшевский Вячеслав — Украина, Винница, школа 34.

### III место заняли

по математике

Байденко Борис — Украина, Киев, Киево-Печерский лицей «Лидер»;

по физике

Муравьев Вячеслав — Смоленск, Смоленская гимназия.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Галкин Никита — Украина, Макеевка, Донецкий колледж,

Ленский Тимур — Таганрог, школа 24,

Войтенко Андрей — Украина, Донецк, Донецкий колледж;

по физике

Седельников Михаил — Крым, Севастополь, школа-гимназия 1,

Зольников Дмитрий — Ульяновск, школа 20,

Воробушков Василий — Иваново, лицей 33.

Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за первое полугодие 2001 года.

# Задачи

**1.** Вдоль аллеи стоят 20 столбиков, каждый из которых имеет высоту 1 м, 2 м или 3 м. Вася, идя в одну сторону, насчитал 13 пар соседних столбиков, высота столбиков в которых возрастала. Когда он шел обратно, то насчитал ровно 5 таких пар. Не ошибся ли Вася в расчетах?

*Д.Калинин*



**2.** Профессор Мумбум-Плюмбум пытается найти простые числа, которые можно представить в виде разности

$$\overbrace{aa\dots a}^{b \text{ цифр}} - \overbrace{bb\dots b}^{a \text{ цифр}}$$

где  $a, b$  – цифры,  $b > a$ . Удастся ли ему это сделать?

*Я.Камыш*



**3.** В больнице находятся только врачи и больные. Средняя температура врачей отличается от средней температуры больных, но среднее этих двух чисел совпадает со средней температурой всех находящихся в больнице. Кого в больнице больше – врачей или больных?

*А.Жуков*



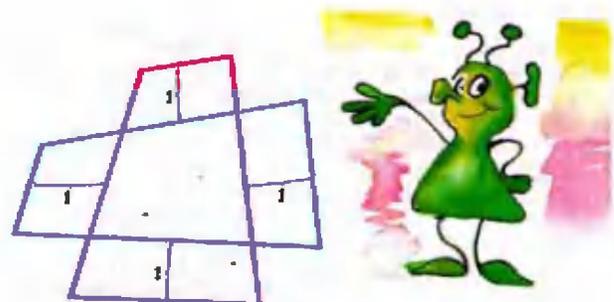
**4.** Некоторые из 50 ребят знают все буквы, кроме «р», которую они пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к» (и пропускают ее при письме). Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 22 других учеников – слово «крот», а остальных 18 – «рот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно?



*Р.Семизаров*

**5.** У крестообразно пересекающихся четырехугольников соответственные стороны параллельны и отстоят друг от друга на расстояние 1. Докажите, что периметры четырехугольников равны.

*В.Произволов*



# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

**Мы начинаем очередную конкурсную порешению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (спометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.**

**Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.**

1. В завещании купца Бубликова говорится: «Старшему сыну причитается 100 рублей и  $\frac{1}{k}$  часть остатка. Вслед за ним второму сыну причитается 200 рублей и  $\frac{1}{k}$  часть остатка. Затем третьему сыну причитается 300 рублей и  $\frac{1}{k}$  часть остатка, и так далее до последнего сына, которому причитается все, что останется от старших братьев. Деньги выдать сыновьям лишь в том случае, если они сумеют найти сумму завещанных мною денег и определить число  $k$  таким образом, чтобы всем им досталось поровну».

Помогите сыновьям купца Бубликова справиться с этой задачей.

*Д.Изаак*

2. Даны десять карточек с цифрами 0, 1, 2, ..., 9. Можно ли расположить эти карточки по кругу таким образом, чтобы все числа, образованные стоящими рядом двумя цифрами (число читается по часовой стрелке), имели общий делитель, больший единицы?

*В.Зачков*

3. Угол  $A$  ромба  $ABCD$  равен  $60^\circ$ . Прямая, проходящая через точку  $C$ , пересекает прямые  $AB$  и  $AD$  в

точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что угол между прямыми  $MD$  и  $NB$  равен  $60^\circ$ .

*А.Заславский*

4. Найдите все решения в натуральных числах  $x, y, z$  уравнения

$$3xyz - 5yz + 3x + 3z = 5.$$

*В.Произолов*

5. В каждую клетку прямоугольной таблицы записали либо букву  $A$ , либо букву  $U$ . При этом буква  $A$  оказалась записанной 33 раза, а буква  $U$  – 7 раз, причем вблизи каждой буквы  $A$  разместились ровно одна буква  $U$  (две клетки таблицы считаются близкими, если они имеют общую сторону или вершину).

Полагая, что в таблице количество строк превышает количество столбцов, вычеркнули все строки, в которых записана хотя бы одна буква  $U$ .

Сколько букв  $A$  осталось в таблице?

*И.Акулич*

## Победители конкурса «Математика 6–8» 2000 года

**Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:**

*Дятлов Семен* – Новосибирск, гимназия 3, 8 кл.,  
*Исаев Михаил* – Барнаул, школа-гимназия 42, 8 кл.,  
*Бабичева Татьяна* – Набережные Челны, гимназия 26, 6 кл.,

*Цимбалюк Александр* – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
*Гончарук Наталья* – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,  
*Атемасов Алексей* – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
*Малеев Алексей* – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
*Есебуа Георгий* – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
*Криворучко Андрей* – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,  
*Валуженич Александр* – Ангарск, школа-гимназия 10, 6 кл.,

*Филлимонов Владислав* – Екатеринбург, школа-гимназия 9, 8 кл.,

*Фефелов Александр* – Коломна, гимназия 2, 8 кл.,  
*Егоров Сергей* – Харьков, МШ МАН при ХОДДЮТ, 7 кл.,

*Жернов Павел* – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,  
*Ильях Валерий* – Долгопудный, ФМШ 5, 8 кл.,  
*Платов Владимир* – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.

**и кружки:**

гимназии 127, Снежинск, руководитель *А.А.Малеев*, математической школы Малой академии наук при Харьковском областном дворце детского и юношеского творчества, руководитель *С.А.Лифиц*, «Эрудит», ФМШ 32, Астрахань, руководители



«обратную пирамиду» (рис.1).

Например, умножая 29 на 45, имеем

$$\begin{array}{r} 0 \quad 8 \quad 4 \quad 5 \\ \quad 3 \quad 6 \\ \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

Теперь осталось сложить «в столбик» выписанные числа, и ответ готов: 1305. В отличие от традиционного поразрядного умножения, здесь не нужно запоминать и держать «в уме» цифры, переносимые в старший разряд для складывания со следующим произведением.

При возведении в квадрат двузначного числа  $10a + b$  схема «обратной пирамиды» несколько упрощается



Рис. 2

(рис.2).

Например, возводя в квадрат число 67, имеем

$$\begin{array}{r} + 3 \quad 6 \quad 4 \quad 9 \\ \quad 8 \quad 4 \\ \quad 4 \quad 4 \quad 8 \quad 9 \end{array}$$

Этот способ удобен при устных расчетах. Если потренироваться, можно сравнительно легко возводить в квадрат все двузначные числа. Эксперименты с методом «обратной пирамиды» показали увеличение скорости вычислений примерно в 3 раза (конечно, степень улучшения зависит от конкретного человека). Более того, метод допускает естественное обобщение на многозначные числа.

На рисунке 3 приведен пример возведения в квадрат числа 3456789. В первой строке в ряд записываются квадраты цифр возводимого в квадрат числа по порядку. В следующей строке стоят удвоенные произведения соседних цифр, в следующей за ней строке – удвоенные произведения соседей «через одного» и т.д. Если какая-

3	4	5	6	7	8	9	исходное число								
0	9	1	6	2	5	3	6	4	9	6	4	8	1	квадраты цифр числа	
															удвоенные произведения соседних цифр
															удвоенные произведения «соседей через одного»
															удвоенные произведения «соседей через двух» и т.д.
															удвоенное произведение крайних цифр числа
1	1	9	4	9	3	9	0	1	9	0	5	2	1	результат	

Рис. 3



то цифра в квадрате своем дает однозначное число или если удвоенное произведение каких-либо цифр является однозначным числом, то в ячейке, отведенной для записи данного результата, в разряде десятков записывается 0, в разряде единиц – получившееся число. Если же, наоборот, при удвоении произведения получилось трехзначное число, начинающееся на 1 (других вариантов быть не может), то эта единица переносится в соседнюю слева ячейку в разряд единиц (на рисунке 3 ячейки, в которые была внесена единица, выделены толстыми линиями).

# Вращающееся кольцо тетраэдров

В.АЛЕКСАНДРОВ

СДЕЛАЙТЕ КСЕРОКОПИЮ ПРИЛАГАЕМОЙ развертки на плотную пишущую бумагу в отношении 1:1 (при этом длины отрезков  $AB$  и  $AC$  будут равны 3 см) или на полукартон в отношении 1:2 (при этом длины отрезков  $AB$  и  $AC$  будут равны 6 см). Вырежьте развертку по пунктирной линии и несколько раз перегните по каждой из сплошных линий.

Сверните развертку «колбаской» и склейте, используя специально помеченные треугольники. Затем сверните получившуюся поверхность в кольцо и зафиксируйте в таком положении с помощью двух трапеций, помеченных на развертке словами «Для клея». Обратите внимание, что склеивать эти трапеции между собой не надо.

Вы получите кольцо из 6 тетраэдров, попарно соединенных вдоль ребер. Самое удивительное состоит в том, что такая конфигурация допускает вращения без видимых растяжений или сжатий материала.

Вращающиеся кольца тетраэдров были открыты Дж.М.Андреасом и Р.М.Сталкером независимо друг от

друга. Кажется, это было сделано в конце 30-х годов XX века.

На русском языке о вращающихся кольцах тетраэдров можно прочитать на с.168—169 книги [1]. Там, в частности, говорится, что 1) кольцо может содержать  $n \geq 6$  тетраэдров; 2) когда  $n$  четно, фигура стремится принять симметричную форму; 3) особенно хороша форма при  $n = 10$ ; 4) когда  $n$  нечетно, из-за полного отсутствия симметрии картина становится, пожалуй, еще более захватывающей; 5) при  $n \geq 22$  кольцо может заузливаться.

Попробуйте проверить эти утверждения, склеивая соответствующие модели из бумаги. Попробуйте раскрасить вращающееся кольцо тетраэдров возможно более симметричным образом.

Постарайтесь повторить достижение Р.В.Хита, расположившего числа от 1 до 32 на кольце из восьми тетраэдров, которое стало «магическим» в следующих смыслах: четыре грани каждого тетраэдра дают в сумме 66; «соответствующие» грани, взятые по одной из каждого тетраэдра, дают в сумме 132;



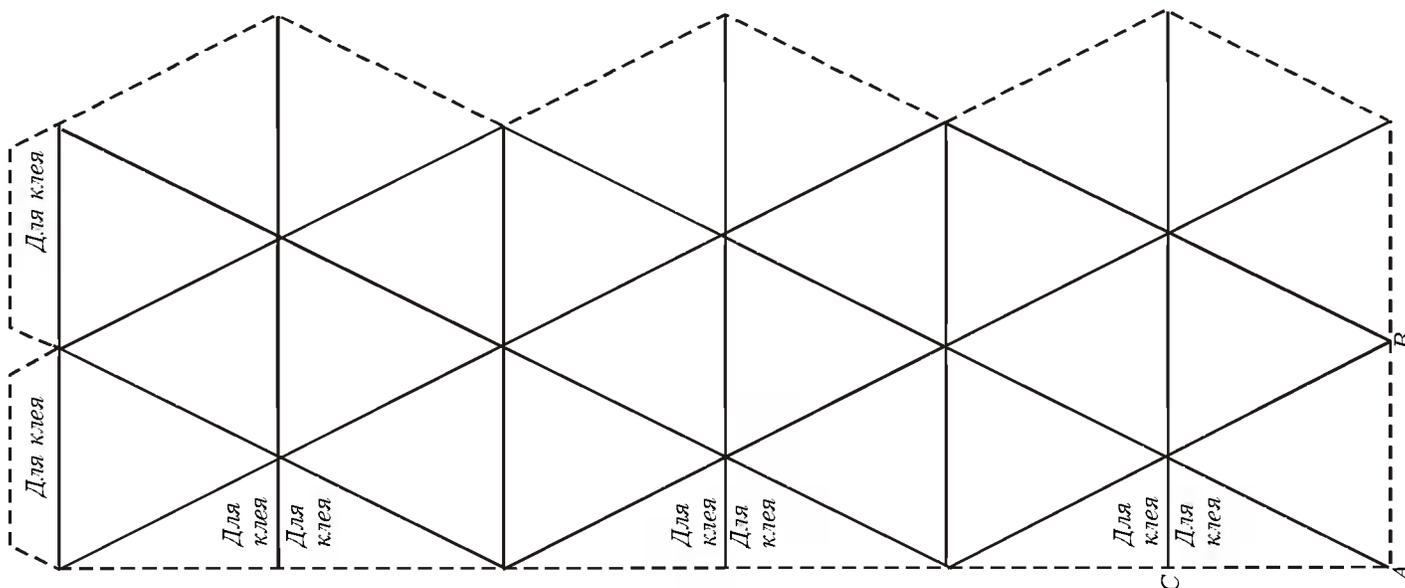
то же значение получается для восьми наборов из восьми граней, которые спирально обвиваются вокруг кольца. Прочитать об этом можно на с. 233—234 книги [1].

Упомянем еще замечательную книгу [2], в которой гравюры широко известного голландского художника Мориса Корнелиса Эшера перенесены на многогранники и, в частности, на вращающиеся кольца тетраэдров. К сожалению, вышедшая впервые в 1977 году, книга [2] опубликована на французском, испанском, японском и, видимо, многих других языках, но не на русском.

## Литература

[1]. У.Болл, Г.Коксетер. *Математические эссе и развлечения*. — М.: Мир, 1986.

[2]. D.Schattschneider, W.Walker, M.C.Escher *kaleidocycles*. — Köln: Benedikt Taschen Verlag GmbH, 1992.



Если какой-либо предмет поместить над сосудом и удалить сосуд от глаза настолько, что предмет не будет виден, то он вновь станет виден на этом расстоянии, если сосуд залить водой.

Евклид

...я... вычислил подробно ход всех лучей, которые падают на различные точки водяной капли, чтобы узнать, под какими углами они могут попасть в наш глаз после двух преломлений и одного или двух отражений.

Рене Декарт

Ученейший Декарт предложил закон преломления, который, как считают, согласуется с опытом, но, чтобы доказать его, он

выдвинул постулат... что, как кажется, противоречит естественным фактам.

Пьер Ферма

...отсюда видно, что угол отражения оказывается равным углу падения.

Христиан Гюйгенс

Солнечный свет состоит из лучей разной преломляемости.

Исаак Ньютон

Геометрическая оптика и очень проста и очень сложна.

Ричард Фейнман

# А так ли хорошо знакомы вам преломление и отражение света?

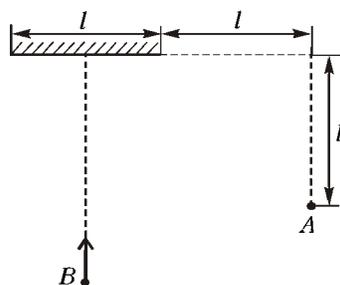
Давние читатели «Кванта» припомнят, что уже встречались с этими понятиями на страницах «Калейдоскопа». Однако мы вовсе не собираемся повторяться, а просто поворачиваем наш любимый прибор, давший название рубрике, чтобы рассмотреть новый «узор», созданный всего лишь двумя оптическими явлениями. Действительно, разве можно исчерпать многообразие парадоксов и загадок, опытов и задач на преломление и отражение света, притягивающих внимание человечества уже более двух тысяч лет?!

Евклид описывает опыт, который до сих пор не сходит со страниц школьных учебников. Декарт пытается объяснить происхождение радуги, и это объяснение практически не претерпевает изменений без малого четыреста лет. Ферма и Гюйгенс ищут и находят универсальные принципы распространения света, с помощью которых сегодня каждый старшеклассник может вывести законы геометрической оптики. Ньютон раскладывает белый свет, пользуясь преломляющей его призмой, — и этот опыт также становится «школьным».

Присоединяйтесь ко всем, кого красота и причудливость оптических явлений не могли оставить равнодушными, и вы обнаружите, что в предупреждении Фейнмана равно привлекательны как первая, так и вторая его половина.

## Вопросы и задачи

1. Почему ночью лужа на неосвещенной дороге кажется водителю темным пятном на светлом фоне?
2. Можно ли вместо белого полотна (экрана) в кинотеатрах использовать плоское зеркало?
3. Сбоку от зеркала шириной  $l$  в точке  $A$  находится человек, как показано на рисунке. Второй человек (точ-

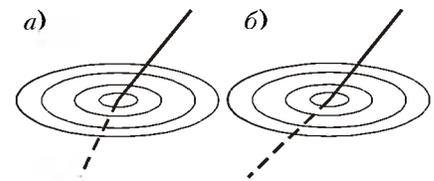


ка  $B$ ) приближается к зеркалу по перпендикуляру, проходящему через середину зеркала. На каком расстоянии от зеркала будет находиться второй человек в тот момент, когда оба увидят друг друга в зеркале?

4. При каком условии плоское зеркало может дать действительное изображение?

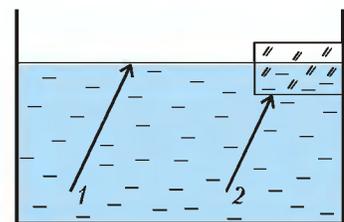
5. Можно ли, направляя свет фонарика на плоское зеркало, осветить находящееся за ним мнимое изображение?

6. Два художника, гуляя по берегу озера, обратили внимание на наклонную палку, торчащую из воды, и



затем изобразили увиденное так, как показано на рисунках а) и б). Какой из художников ошибся?

7. В воде идут два параллельных луча 1 и 2, как изображено на рисунке. Луч 1 выходит в воздух непосредственно, а луч 2 проходит сквозь



горизонтальную плоскопараллельную пластинку, лежащую на поверхности воды. Будут ли эти лучи параллельны при выходе в воздух?

8. Может ли произойти полное отражение света при переходе из воды в стекло?

9. Луч света падает на однородный прозрачный шар и проникает в него. Проходя внутри шара, он достигает поверхности раздела шар — воздух. Может ли в этой точке произойти полное отражение?

10. Погрузив карандаш наполови-



ну в воду, налитую в ванну, вы заметите на ее дне тень от карандаша такой, как это изображено на рисунке. Отчего возник светлый промежуток?

**11.** Если пятикопеечную монету закоптить и положить на дно сосуда с водой, то она может показаться серебряной. Почему?

**12.** Чему должен равняться показатель преломления прозрачного материала, из которого изготовлен шарик с посеребренной задней поверхностью, чтобы любой луч, проходящий внутри шарика не слишком далеко от его центра, после отражения от задней поверхности выходил из шарика параллельно падающему лучу?

**13.** В зеркале из толстого стекла видно одно яркое и несколько бледных изображений лампы. Почему?

**14.** В плоском зеркале видно изображение свечи. Что произойдет с этим изображением, если между зеркалом и свечой поставить плоскопараллельную пластинку?

**15.** Отчего толченное стекло непрозрачно? Почему оно становится прозрачным, если его погрузить в воду?

### Микроопыт

Встаньте перед плоским зеркалом, закройте левый глаз и наложите на зеркало бумажку так, чтобы не видеть изображения закрытого глаза. Не меняя положения головы, откройте левый глаз и закройте правый. Будет ли видно теперь изображение закрытого глаза? В чем причина наблюдаемого явления?

### Любопытно, что...

...еще в комедии древнегреческого драматурга Аристофана отмечалась возможность расплавления восковой таблички с помощью зажигательного (преломляющего) стекла. А над тем, почему палка в воде кажется надломленной, размышлял сам Аристотель.

...со времени появления работы Евклида, в которой он первым дал рациональное объяснение образованию изображений в плоском и сферическом зеркалах, раздел оптики, исследующий отражение света, именовался катоптрикой (от греч. *катоптрон* – зеркало), а раздел, занимающийся изучением преломления света, назывался диоптрикой (что по-

гречески означает искусство измерять расстояние).

...в Сиракузах, где, по легенде, Архимед поджигал римские корабли с помощью зеркал, ему был установлен памятник, изображающий ученого со сферическим сегментом в руках, направленным в сторону моря. Однако авторы изваяния не рассчитали, что подобным «зеркалом» можно было бы поджечь что-нибудь на расстоянии всего лишь около полуметра.

...еще древнеримский ученый Плиний в своей «Естественной истории», написанной около двух тысяч лет назад, рассказывал о ловцах жемчуга, набравших в рот оливковое масло перед погружением и выпускавших его под водой. Растекавшаяся по поверхности моря масляная пленка, показатель преломления которой больше, чем у воды, резко уменьшала яркость бликов и улучшала условия видимости.

...знаменитую задачу арабского ученого Альхазена о нахождении точки отражения от сферического зеркала, сформулированную около тысячи лет назад, удалось решить Гюйгенсу только в 1676 году.

...Леонардо да Винчи писал научные трактаты перевернутым (зеркальным) шрифтом, видимо, пытаясь таким образом засекретить их содержание. Его рукописи впервые были расшифрованы и опубликованы лишь три столетия спустя.

...Кеплеру не удалось найти правильный закон преломления света, однако проведенные им многочисленные опыты привели его к открытию явления полного внутреннего отражения.

...критическое отношение к заблуждениям Декарта побудило Ферма обратиться к трудам Герона, установившего еще до новой эры «принцип кратчайшего пути» для света. Четыре года сомнений и размышлений привели французского ученого к доказательству знаменитого «принципа наименьшего времени», на основе которого выводятся законы отражения и преломления света.

...когда Огюстену Френелю необходимо было создать огромную линзу для маяка, ему пришла идея составить ее из множества повернутых друг относительно друга призм. Такая плоская линза оказалась намного легче обычной «чечевицы» и с успехом стала служить мореплавателям. Много позже подобная идея нашла применение в концентраторах солнечной энергии – для этого нужно было лишь изменить направление световых лучей.

...наиболее современная и абстрактная теория геометрической оптики, разработанная ирландским математиком и физиком Уильямом Гамильтоном, имеет важные приложения в... механике. Открытая им оптико-механическая аналогия объяснила, почему и волновая теория Гюйгенса и корпускулярная теория Ньютона одинаково хорошо описывали явления отражения и преломления света.

### Что читать в «Кванте» о преломлении и отражении

(публикации последних лет)

1. «Паркет-хамелеон» – 1996, №4, с.36;
2. «Законы отражения и преломления света» – 1996, №5, с.49;
3. «Сквозь розовые очки» – 1997, №6, с.20;
4. «Калейдоскоп «Кванта» – 1998, №3, с.32;
5. «Оптические системы и приборы» – 1998, №5, с.47;
6. «Волшебная линза» – 1999, №1, с.44;
7. «Камера-обскура» – 1999, №2, с.12;
8. «Геометрическая оптика» – 1999, Приложение №2, с.100;
9. «Лазерная указка» – 2000, №3, с.18;
10. «Пределы зоркости приборов» – 2000, №3, с.39.

Материал подготовил  
А.Леопович

**Физика 9–11**

Публикуемая ниже заметка «Удивительные катки» предназначена девятиклассникам, заметка «Как чайник стал таймером» – десятиклассникам и «Кто-то приближается?» – одиннадцатиклассникам.

# Удивительные катки

Б. КОГАН

ПРЕДСТАВЬТЕ СЕБЕ ДОСКУ, КОТОРАЯ ДВИЖЕТСЯ НА КРУГЛЫХ КАТКАХ (сейчас опять в моду вошли самокаты – прим. ред.). При этом она сохраняет горизонтальное положение и остается на одной и той же высоте. Почему это происходит? Да потому, что окружность имеет одну и ту же ширину при любом повороте.

А будет ли доска двигаться так же, если воспользоваться некруглыми катками? В первый момент кажется, что это невозможно. Не будем, однако, спешить. Оказывается, есть кривые, которые, подобно окружности, имеют одинаковую ширину во всех направлениях. Они так и называются линиями одинаковой ширины.

Одна из простейших кривых такого рода показана на рисунке 1. Она со-

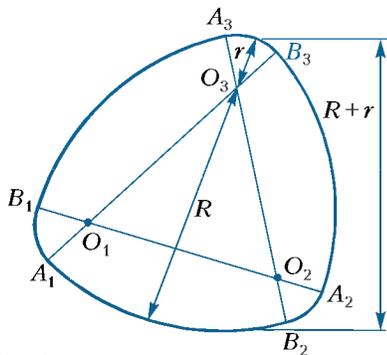


Рис. 1

стоит из дуг  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  радиусом  $r$  и дуг  $B_1A_3$ ,  $B_3A_2$ ,  $B_2A_1$  радиусом  $R$ , центры которых находятся в вершинах правильного треугольника  $O_1O_2O_3$ . Легко видеть, что ширина этой кривой одинакова во всех направлениях и равна  $R + r$ . Следовательно, катки, профили которых очерчены по таким кривым (рис.2), будут работать ничуть не хуже круглых.

Кривую, изображенную на рисунке 1, можно получить так. Возьмем отрезок  $A_1B_3$  и, повернув его на  $60^\circ$  вокруг точки  $O_1$ , переведем в положение  $B_1A_2$ . Затем, повернув отрезок  $B_1A_2$  на  $60^\circ$

вокруг точки  $O_2$ , получим отрезок  $A_3B_2$ , и, наконец, повернув отрезок  $A_3B_2$  на  $60^\circ$  вокруг точки  $O_3$ , вновь придем к отрезку  $A_1B_3$ . В процессе этих поворотов один конец рассматриваемого отрезка опишет дугу  $A_1B_1A_3B_3$ , а другой – дугу  $B_3A_2B_2A_1$ . Следовательно, кривую, показанную на рисунке 1, можно рассматривать как траекторию, описываемую концами некоторого отрезка при трех поворотах вокруг точек, лежащих на этом отрезке.

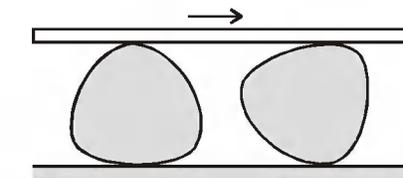


Рис. 2

Пользуясь этим методом, можно получить много кривых подобного рода. Например, кривая, показанная на рисунке 3, образуется в результате поворотов отрезка  $AB$  вокруг центров  $O_1, O_2, O_3$ . Величина и направление каждого поворота показаны стрелками

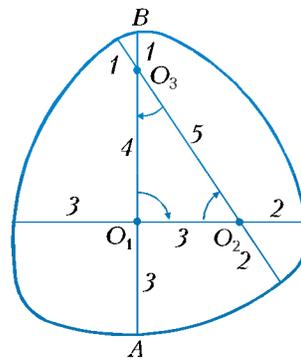


Рис. 3

рода. Например, кривая, показанная на рисунке 3, образуется в результате поворотов отрезка  $AB$  вокруг центров  $O_1, O_2, O_3$ . Величина и направление каждого поворота показаны стрелками

ми. Цифры на рисунке показывают длины соответствующих отрезков. Ширина всех этих кривых постоянна и равна длине поворачиваемого отрезка. Можно поворачивать отрезок вокруг одного из его концов. Так мы

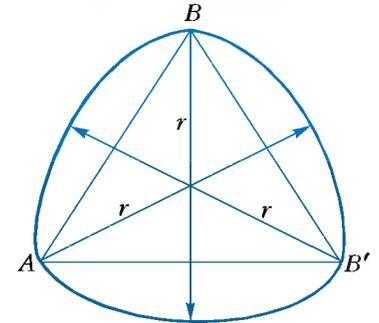


Рис. 4

получим простейшую кривую равной ширины, отличную от окружности (рис.4). При этом отрезок  $AB$  поворачивается сначала вокруг точки  $A$ , переходя в положение  $AB'$ , затем вокруг точки  $B'$ , переходя в отрезок  $B'B$ , и, наконец, вокруг точки  $B$ , замыкая кривую.

Рассмотрим теперь некоторый отрезок  $AB$ . Пусть он катится без скольжения по кривой  $SS$  (рис.5). Тогда в каждый отдельный момент такое дви-

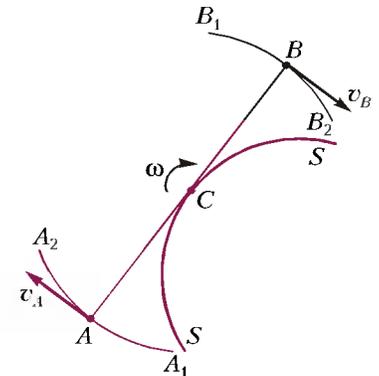


Рис. 5

жение можно рассматривать как вращение отрезка относительно точки касания. Точка касания, относительно которой в данный момент совершается поворот, называется мгновенным центром вращения. В нашем случае – это точка  $C$ . Представление о мгновенном центре вращения позволяет легко вычислять скорости различных точек отрезка  $AB$ . Например, для скоростей точек  $A$  и  $B$  будем иметь

$$v_A = \omega \cdot CA, \quad v_B = \omega \cdot CB,$$

где  $\omega$  – угловая скорость отрезка  $AB$  в его мгновенном вращении вокруг центра  $C$ . При этом скорости рассматриваемых точек будут перпендикуляр-

ны соответствующим радиусам вращения, т.е. отрезкам  $CA$  и  $CB$ . Таким образом можно вычислить скорость любой точки, лежащей на этом отрезке или жестко связанной с этим отрезком. Если, например, с отрезком  $AB$  жестко связана некоторая фигура, то скорость любой ее точки  $P$  равна произведению  $\omega \cdot CP$ .

Вернемся теперь к кривым постоянной ширины. Пусть отрезок  $AB$  катится по кривой  $SS$ . Так как скорости  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  перпендикулярны радиусам  $CA$  и  $CB$ , то они параллельны между собой. Но скорость  $\vec{v}_A$  направлена по касательной к траектории точки  $A$ , а скорость  $\vec{v}_B$  – по касательной к траектории точки  $B$ . Следовательно, эти касательные параллельны друг другу, и расстояние между ними все время остается равным  $AB$ . Но это значит, что траектории  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  можно рассматривать как участки некоторой кривой постоянной ширины.

Однако нам нужно построить не два участка, а всю такую кривую. Если мы хотим сделать это с помощью описываемой операции, то должны выбрать линию  $SS$  так, чтобы, обкатывая ее, отрезок  $AB$  повернулся на  $180^\circ$ , т.е. чтобы точка  $A$  пришла в положение  $B$ , а точка  $B$  – в положение  $A$ . Одна из таких линий –  $PQRP$  – показана на рисунке 6. Проследим более подробно, как отрезок  $AB$  обкатывает ее.

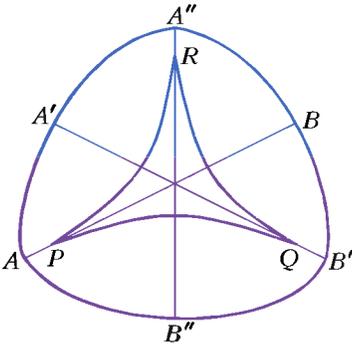


Рис. 6

Сначала он катится по участку  $PQ$  и приходит в положение  $A'B'$ , при этом его концы описывают дуги  $AA'$  и  $BB'$ . Затем он катится по участку  $QR$ , и его концы описывают дуги  $A'A''$  и  $B'B''$ . Наконец, он обкатывает участок  $RP$ , а его концы движутся по дугам  $A''B$  и  $B''A$ . В результате точка  $A$  приходит в положение  $B$ , а точка  $B$  – в положение  $A$ , и кривая постоянной ширины замыкается. При этом дуги  $PQ$ ,  $QR$  и  $RP$  могут иметь любую форму и не обязательно должны быть одинаковыми. Единственное, что от них требуется, – это чтобы они были выпуклыми и

касались друг друга так, как это показано на рисунке 6. Что касается отрезков  $AP$  и  $PB$ , то их длина не может быть произвольной, ибо тогда дуга, описываемая точкой  $A$ , не волеется в дугу, описываемую точкой  $B$ . Здесь можно поступить следующим образом. Проведем через точку  $P$  прямую, касающуюся дуги  $PQ$ , и поставим на ней точку  $A$ . Заставим теперь эту прямую обкатывать линию  $PQR$ . Тогда конец дуги, которую опишет при этом точка  $A$ , определит положение точки  $B$ .

Линия  $PQR$ , показанная на рисунке 6, состоит из трех дуг. Но число дуг может быть и большим. Например, на

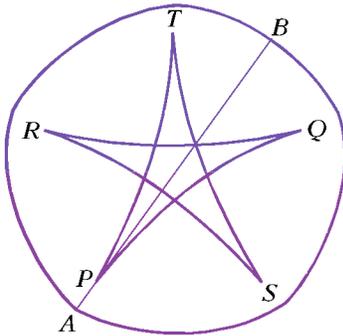


Рис. 7

рисунке 7 изображена кривая постоянной ширины, полученная при обкатывании линии  $PQRSTP$ , состоящей из пяти дуг.

Кривые постоянной ширины обладают еще одним свойством, роднящим их с окружностью: периметр кривой постоянной ширины равен  $l = \pi D$ , где  $D$  – ширина этой кривой. Действительно, пусть горизонтальная прямая  $PQ$  перемещается с помощью катков постоянной ширины (рис.8). Рассмотрим один из этих катков, например

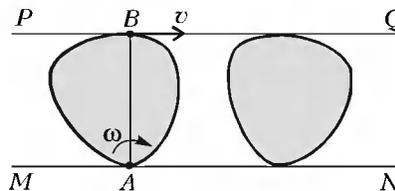


Рис. 8

левый. Пусть его ширина  $D$ , а периметр  $l$ . Когда прямая  $PQ$  передвинется настолько, что этот каток сделает один оборот, он сместится относительно прямой  $MN$  на расстояние  $l$  вправо. А так как он катится не только по прямой  $MN$ , но и по прямой  $PQ$ , то после одного оборота он окажется смещенным относительно прямой  $PQ$  на расстояние  $l$  влево. Следовательно, перемещение прямой  $PQ$  относительно

прямой  $MN$  будет равно  $2l$ . А так как это же смещение равно  $vt$ , где  $t$  – время, за которое каток делает один оборот, то

$$2l = vt.$$

(Мы считаем, что прямая  $PQ$  движется с постоянной скоростью.) Мгновенный центр вращения катка находится в точке  $A$ , значит, скорость перемещения равна

$$v = \omega \cdot AB = \omega D,$$

где  $\omega$  – угловая скорость катка. Тогда

$$2l = \omega Dt.$$

Но  $\omega t$  есть угол поворота катка за один оборот, следовательно,

$$\omega t = 2\pi, \text{ и } 2l = 2\pi D,$$

откуда

$$l = \pi D.$$

Таким образом, периметр кривой постоянной ширины вычисляется так же, как периметр окружности. А какая площадь, ограниченная кривой постоянной ширины? Можно ли ее вычислять так же, как площадь круга? Оказывается, нет. Однако площадь кольца постоянной ширины можно вычислять, как площадь кольца между двумя концентрическими окружностями.

Рассмотрим кривую постоянной ширины. Через произвольную точку на ней проведем нормаль (нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной) и отложим вдоль нее отрезок заданной длины. Отложив такие отрезки от каждой точки данной кривой, получим новую кривую, являющуюся геометрическим местом концов отложенных отрезков. Очевидно, она тоже будет иметь постоянную ширину. При этом площадь, заключенная между этими кривыми, будет равна разности площадей фигур, ограниченных наружной и внутренней кривыми.

Попробуйте доказать это самостоятельно.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования  
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!  
<http://vivovoco.nns.ru>  
(раздел «Из номера»)

# Как чайник стал таймером

А. СТАСЕНКО

*timer* [ˈtaɪmɜː]: 1) хронометрист (на скачках); 2) часы, хронометр; 3) автоматический прибор, регулирующий продолжительность операции.

Англо-русский словарь

НЕ БЫЛО ЧАСОВ У СТУДЕНТА: несчастные их не наблюдают. Однако надо же знать – когда лекция, когда ужин... И тут пришло в голову Студенту использовать изменение со временем какой-нибудь физической величины, например температуры... чайника. А для этого пригодится лабораторный термометр, с помощью которого можно измерять температуру в пределах  $0\text{ }^{\circ}\text{C} < T < 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Итак, «заведем» такие часы: нагреем воду в чайнике до  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , укутаем его одеялом (чтобы часы дольше работали) и вставим в носик термометр (рис.1).

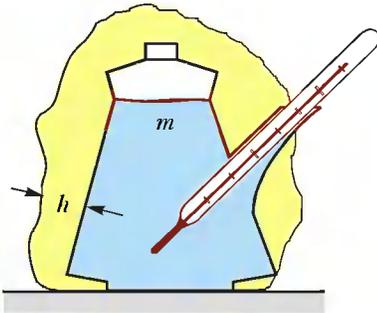


Рис. 1

Теперь нужно часы проградуировать – найти взаимно однозначное соответствие между временем  $t$  и показаниями термометра  $T$  (рис.2). Оценим прежде всего характерное время  $\tau$ , за которое температура чайника заметно изменится. Почему он вообще остывает? Ясно, что это связано с наличием разности между температурой чайника  $T$ , зависящей от времени, и температурой окружающего воздуха  $T_{\infty}$ , которая, в общем, тоже может изменяться, но мы будем считать ее постоянной.

Если эта разность температур суще-

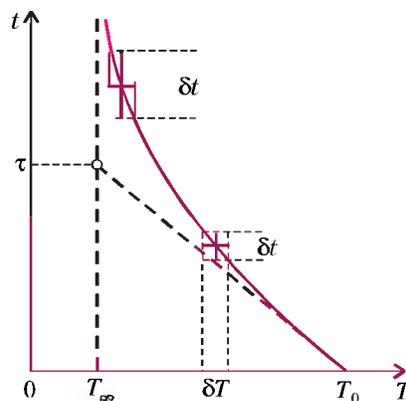


Рис. 2

ствует в точках пространства, отстоящих друг от друга на расстояние  $h$ , то плотность потока тепла  $q$  (энергию, уходящую в единицу времени через единицу площади) записывают в виде

$$q = -\lambda \frac{T_{\infty} - T}{h}.$$

Собственно, это соотношение определяет величину  $\lambda$  – коэффициента теплопроводности материала, через который протекает тепловая энергия. Легко установить размерность этой величины:

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

В нашем случае это коэффициент теплопроводности одеяла (вместе с содержащимся в нем воздухом). А знак «минус» напоминает, что тепло течет в сторону уменьшения температуры.

Далее, если площадь поверхности чайника равна  $S$ , то полная энергия, уходящая через эту площадь в единицу времени, равна, очевидно,  $qS$ .

Осталось записать ясную физическую идею: вследствие отвода тепловой

энергии температура воды в чайнике  $T$  уменьшается. Если  $m$  – масса воды,  $c$  – ее удельная теплоемкость (теплоемкостью корпуса чайника и термометра пренебрежем), то

$$\frac{mc\Delta T}{\Delta t} = -\frac{S\lambda}{h}(T - T_{\infty}).$$

Считая, что произведение  $mc$  постоянно, запишем это уравнение в так называемом релаксационном виде:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{T - T_{\infty}}{\tau}, \quad (*)$$

где величина

$$\tau = \frac{hmc}{S\lambda}$$

просто обязана иметь размерность времени (проверьте).

Сделаем численную оценку этого времени. Будем считать для простоты, что чайник имеет форму шара радиусом  $a$ , заполненного водой. Тогда его поверхность  $S = 4\pi a^2$ , масса воды в нем  $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$  (где  $\rho$  – плотность воды), так что

$$\tau = \frac{h\rho ac}{3\lambda}.$$

(В частности, отсюда видно, почему меньшей нужно укутывать в три шубы особенно тщательно: поскольку их характерный размер  $a$  мал, нужно брать толщину шуб  $h$  побольше).

Итак, выпишем значения всех необходимых величин: плотность воды  $\rho = 10^3\text{ кг/м}^3$ , ее удельная теплоемкость  $c = 4,2 \cdot 10^3\text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , коэффициент теплопроводности одеяла примем равным  $\lambda = 0,03\text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$  (соответствующим хлопковой вате), его толщина пусть будет  $h = 3\text{ см} = 0,03\text{ м}$ , «радиус» чайника  $a \sim 0,1\text{ м}$ . Тогда

$$\tau \sim \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 4,2 \cdot 10^3}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \text{ с} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ с} \sim 40 \text{ ч}.$$

Но что это за время? Если строго решить дифференциальное уравнение (\*), получится экспоненциальная зависимость температуры от времени. Качественно она изображена на рисунке 2 сплошной линией. Характерное время  $\tau$  получается при пересечении наклонной прямой, касательной к кривой  $T(t)$  в начальной точке  $T_0 = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , с прямой  $T_{\infty} = \text{const}$  (см. штриховые прямые на рисунке 2). Ра-

зумеется, если потребовать полного остывания (до нулевой разности температур:  $T - T_\infty \rightarrow 0$ ), то придется ждать бесконечно долго – таково уж свойство уравнения (\*): наклон кривой  $\Delta T/\Delta t$  уменьшается с уменьшением разности температур. Таким образом, для экспериментальной градуировки чайника как измерителя времени, вероятно, потребуются десятки часов. Конечно, это не значит, что придется не спать все это время, но все-таки нужно будет изредка вскакивать и сверять показания термометра с какими-то «эталонными часами» (взятыми на время у приятеля).

А теперь пора поговорить о «точности хода» нового таймера. Безуслов-

но, температура будет определяться с некоторой ошибкой порядка минимального деления шкалы, например  $\delta T = 1^\circ\text{C}$ , – эта ошибка показана на рисунке 2 горизонтальным отрезком. Поскольку наклон кривой  $T(t)$  изменится, будет расти ошибка определения соответствующих отрезков времени  $\delta t$  (принцип их построения ясен из рисунка). Значит, по мере остывания чайника часы будут давать все большую неопределенность во времени. Поэтому им разумно доверять, по-видимому, лишь в течение времени порядка  $\tau$ , после чего рекомендуется «заводить» часы вновь (доводить воду до кипения).

Понятно, что точность этих часов

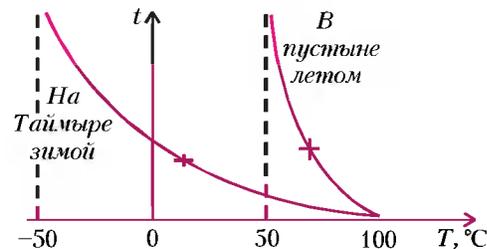


Рис. 3

будет разной в жаркой пустыне и среди снегов. Этот факт иллюстрирует рисунок 3.

Итак, спокойной ночи: следите за термометром!

# Кто-то приближается?

А. СТАСЕНКО

*...сообщения об НЛО уже в большом количестве появляются в середине XIX века, а в годы II мировой войны появляется масса документальных свидетельств о прямо-таки нашествии НЛО на землю.*

Священник Родион. Люди и демоны

**ВСЕВОЗМОЖНЫЕ «ОЧЕВИДЦЫ» И «контактеры»** сообщают о чрезвычайно быстрых и бесшумных перемещениях неопознанных летающих объектов (НЛО). При этом большая часть информации об этих объектах получается в видимом диапазоне спектра (проще говоря, при помощи глаз и, изредка, обычной фотопленки).

А нет ли принципиальной возможности зарегистрировать приближающийся бесшумный НЛО в отсутствие видимости (например, в случае тумана или если НЛО-навтам захочется погасить свои огни)? Какова бы ни была суть этого явления, воспользуемся им для обсуждения законов физики.

Начнем с бесконечного прямого провода, по которому течет постоянный ток  $I$  (рис.1). Как известно, он порождает магнитное поле, линии индукции которого представляют собою концентрические окружности в плоскостях, перпендикулярных проводу. При этом

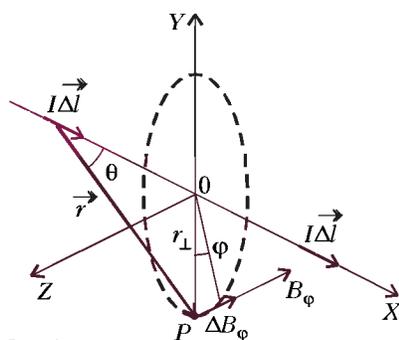


Рис. 1

модуль индукции одинаков во всех точках выделенной окружности радиусом  $r_\perp$  (пунктирная линия) и убывает с расстоянием обратно пропорционально этому радиусу:

$$B_\varphi \sim \frac{I}{r_\perp}, \quad (1)$$

где индекс  $\varphi$  подчеркивает, что индукция имеет только касательную к окружности составляющую.

Этот вектор индукции  $\vec{B}$  можно представить как результат суммирования вкладов от отдельных элементов тока  $I\Delta\vec{l}$ . На рисунке 1 изображены два таких элемента, симметричных относительно рассматриваемой плоскости. Каждый из этих элементов порождает элементарное поле с индукцией

$$\Delta B_\varphi \sim \frac{I\Delta l \sin \theta}{r^2}, \quad (2)$$

где  $\theta$  – угол между направлением элемента тока  $I\Delta\vec{l}$  и радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из этого элемента в точку наблюдения  $P$ . Эта запись отражает закон Био–Савара–Лапласа. Уже одно присутствие стольких замечательных имен говорит о важности закона (2), так что при взгляде на него хочется снять шляпу. В частности, из выражения (2) следует, что индукция пропорциональна самому элементу тока и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до него. Вспомним, кстати, что такой же характер имеет и зависимость напряженности электрического поля точечного заряда (это нам пригодится). Далее, видно, что элемент тока не порождает индукции вдоль своего направления (при  $\theta = 0$ ).

Кто хочет, может просуммировать (проинтегрировать) вклады всех элементов тока и получить из выражения (2) формулу (1). Мы же перейдем к рассмотрению НЛО.

Пусть он имеет формулу шара радиусом  $a$  и несет заряд  $q$ , двигаясь с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , параллельной земле (рис.2). Будем вести наблюдение за магнитным полем, порожденным этим движущимся зарядом, в вер-

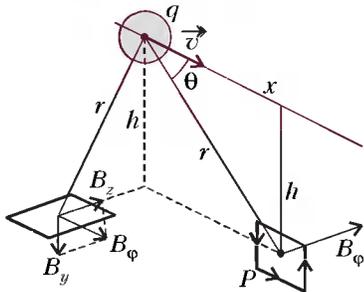


Рис. 2

тикальной плоскости  $XU$ , содержащей вектор  $\vec{v}$ . Если высота полета  $h$ , а расстояние по горизонтали до точки наблюдения  $x$ , то  $r = \sqrt{h^2 + x^2}$  и  $\sin \theta = h/r$ . Кроме того, легко видеть (хотя бы из соображений размерностей), что элемент тока можно записать в виде

$$I \Delta l = qv.$$

Тогда магнитное поле в точке  $P$  будет равно

$$B_\phi \sim \frac{qv_x h}{r^3} = \frac{qv_x h}{(h^2 + (v_x t)^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Здесь мы выбрали отсчет времени  $t$  таким образом, что значение  $t = 0$  соответствует тому моменту, когда НЛО находится прямо над головой наблюдателя; значит, его приближение соответствует отрицательным значениям  $t$ , а удаление – положительным.

Качественная зависимость магнитного поля от времени показана на рисунке 3 сплошной линией.

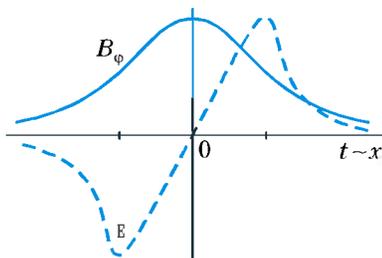


Рис. 3

Итак, индукция  $B_\phi$  зависит от времени! А это значит, что, расположив проволочную рамку вокруг точки  $P$ , мы можем зарегистрировать изменение магнитного поля. Почему? Об этом говорит другой знаменитый закон – закон Фарадея: если изменяется поток магнитной индукции через площадь фиксированного контура, то в последнем наводится электродвижущая сила индукции, пропорциональная скорости изменения этого потока, т.е.

$$E = - \frac{\Delta(B_\phi S)}{\Delta t}, \quad (4)$$

где  $S$  – площадь рамки. Знак «минус» свидетельствует еще об одном замечательном факте, способствующем устойчивости Природы: всякая попытка что-то изменить вызывает противодействие. Вот и индуцированная ЭДС такова (см. рис.3), чтобы созданный ею ток порождал магнитное поле, противоположное внешнему растущему полю  $B_\phi$ , вызванному приближающимся НЛО.

Для численных оценок надо еще уточнить систему единиц и сказать, чему равен электрический заряд НЛО.

Чтобы в предыдущих соотношениях заменить знак пропорциональности на знак равенства, нужно, перейдя к современной Международной системе единиц (СИ), ввести множитель  $\mu_0/(4\pi)$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная. Аналогично, в выражение для напряженности электрического поля точечного заряда  $q$  входит множитель  $1/(4\pi\epsilon_0)$ , содержащий электрическую постоянную  $\epsilon_0 = 1/((4\pi \cdot 9 \cdot 10^9))$  Ф/м:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (5)$$

Отметим великолепный факт: если разделить друг на друга эти два множителя, получим

$$\frac{1/(4\pi\epsilon_0)}{\mu_0/(4\pi)} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 = c^2$$

– квадрат скорости света в вакууме! Все это не случайно и стоит глубоких размышлений...

Но что же НЛО? Если он движется в атмосфере Земли, можно оценить его максимальный заряд. Известно, что в сухом воздухе напряженность электрического поля, при которой еще не возникает пробой, равна  $E_{\max} \sim 3 \cdot 10^6$  В/м. Подставляя это значение в равенство (5), получим оценку для наибольшего значения электрического заряда, который еще не стекает с шарообразного НЛО:

$$q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E_{\max}.$$

Собирая все это вместе и (кто может) продифференцировав выражение (4), получим

$$E = \frac{3\mu_0 S q h v_x^3}{4\pi} \frac{t}{(h^2 + (v_x t)^2)^{5/2}}. \quad (6)$$

Но и без дифференцирования можно качественно описать, как изменяется ЭДС индукции в контуре со временем (см. рис.3, пунктир):  $E = 0$  при  $t = 0$  и достигает самых больших значе-

ний в тех точках, где временная зависимость  $B_\phi(t)$  имеет наибольший наклон.

Тут уже исчерпаны основные физические идеи, и можно заняться численными оценками. Но предоставим эту работу заинтересованным (как мы надемся) читателям.

Мы же заметим, что необязательно располагать виток проволоки в плоскости полета НЛО. Можно его положить на землю горизонтально где-то сбоку. На рисунке 2 слева изображен такой виток в частном случае – на траверзе пролетающего НЛО. Он тоже пронизывается нормальной составляющей магнитного поля, которая тоже зависит от времени и, значит, тоже порождает ЭДС индукции в контуре.

Тут пора сказать слова типа «минздрав предупреждает»: «Шутки с НЛО так же плохи, как шутки с черной магией. Это явление делает своими жертвами неврастеников, легковерных и незрелых людей. Легкое любопытство к НЛО может превратиться в разрушительную одержимость... Школьные учителя и другие взрослые не должны поощрять подростков в их увлечении этим предметом» (Джон Киль). Или вот еще: «Что касается так называемых наблюдений за летающими тарелками, то мне кажется, что вероятность психопатологических реакций или индивидуальной, или коллективной истерии... значительно выше, чем вероятность визита инопланетян» (Жан Клод Пекер).

Но при чем тут фантастический НЛО? Разве сверхзвуковой ночной бомбардировщик не является неопознанным летательным аппаратом? Его не видно (ночь) и не слышно (он опережает звук), а включать активные локационные установки нежелательно из-за возможных «точечных ударов», которыми кичатся современные реальные НЛО-навты. А ведь самолет тоже может нести электрический заряд, так что все рассмотренное выше применимо в этом случае.

Но пусть даже самолет не заряжен электрически – достаточно того, что

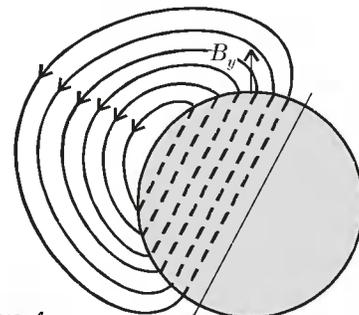


Рис. 4

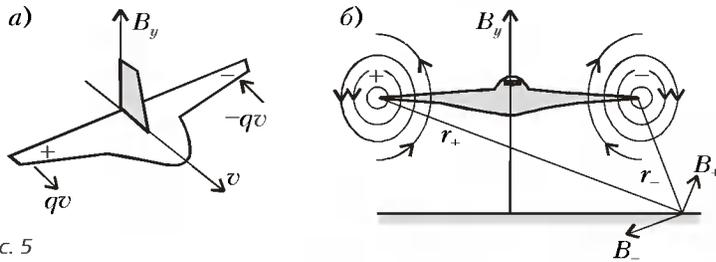


Рис. 5

он движется в магнитном поле Земли. Это поле качественно изображено на рисунке 4. Видно, что оно имеет вертикальную (радиальную) составляющую  $B_y$ . Значит, при движении со скоростью  $v_x$  в этом поле на положительный элементарный заряд  $e$  действует сила Лоренца, равная  $F_z = ev_x B_y$  и приводящая к возникновению горизонтального (перпендикулярного к  $B_y$ ) электрического поля, равного  $E_z = v_x B_y$  (тут индексы указывают направления всех четырех векторов  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{F}$ ). Значит, при размахе крыльев  $L$  между концами самолета возникнет разность потенциалов  $U = v_x B_y L$ .

Поскольку вблизи географического северного полюса находится южный магнитный полюс, нормальная составляющая магнитного поля Земли в Северном полушарии положительна. Легко видеть, что при этом правое крыло самолета будет заряжено положительно, а левое – отрицательно. (В Южном полушарии – все наоборот.)

Таким образом, даже в случае электронеутрального самолета концы его крыльев приобретут заряды  $\pm q$ , одинаковые по величине и противоположные по знаку.

Вследствие движения самолета, этим зарядам можно поставить в соответствие элементы тока  $\pm qv$  (рис.5,а). Каждый из них породит свое магнитное поле, так что в результате получим магнитный диполь (рис.5,б). Линии индукции магнитного поля диполя могут иметь вертикальную составляющую, пронизывающую находящийся на земле проволочный контур и порождающую (вследствие своего изменения во времени) в этом контуре ЭДС.

Конечно, это дипольное поле будет слабее поля движущегося заряда (оно убывает пропорционально  $r^{-3}$ , а не  $r^{-2}$ ); тем не менее, физика указывает на принципиальную возможность зарегистрировать движущийся объект. Остается купить в ближайшем ларьке микроамперметр (еще лучше наноамперметр, еще лучше... – тут-то и понадобятся численные оценки) и включить его в контур. И тогда ни один НЛО не подберется к вам незамеченным.

Если вам здесь не все понятно – не расстраивайтесь. Даже великие ученые не сразу поняли смысл уравнений

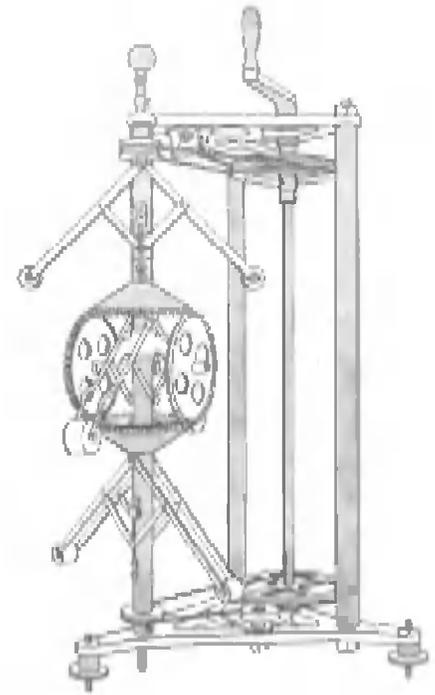


Рис. 6

Максвелла, описывающих электромагнитные явления. Например, Людвиг Больцман в своих попытках объяснить эти явления довольно сложную механическую модель (рис.6). Сейчас нам незачем разбираться в принципе работы этой машины, просто полюбуемся ею как историческим курьезом – и, испытывая свои трудности в понимании законов физики, вы почувствуете себя в приличной компании.

## «КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

### Математические шутки из Интернета

(mailto: cherc@math.utah.edu)

\* Философия есть игра с объективностью без правил. Математика есть игра по правилам без всякой объективности.

\* Отношения между чистыми и прикладными математиками основаны на доверии и понимании. Чистые математики не доверяют прикладным математикам, а прикладные математики не понимают чистых математиков.

\* Чистая математика делает то, что можно, и так, как нужно. Прикладная математика делает то, что нужно, и так, как можно.

\* Жизнь – комплексная, так как в ней имеются реальные и мнимые компоненты.

\* На лекции: «Экзаменационные задачи будут подобны тем, которые мы обсудили в аудитории. Конечно, числа могут различаться. Но не все. Число  $\pi$  по-прежнему будет равно 3,14159...»

\* Константа и функция  $e^x$  гуляют по Бродвею. Вдруг замечают, что к ним приближается дифференциальный оператор.

– О, Боже! – в страхе восклицает константа. – Я убегаю!

– Почему? – спрашивает ее функция.

– Если дифференциальный оператор меня продифференцирует, от меня ничего не останется!

– А я не боюсь! – говорит функция и обращается к дифференциальному оператору:

– Хелло, я –  $e^x$ !

– Хелло, – отвечает дифференциальный оператор, а я –  $\frac{d}{dy}$ !

\* Теорема. Все положительные числа интересны.

Доказательство. Предположим противное. Тогда должно существовать наименьшее неинтересное положительное число.

Ха, так ведь это чертовски интересно!

Противоречие.

Публикацию подготовил А. Жуков

# Вихрь в тумане

А. СТАСЕНКО

Также нельзя привести простой и единой причины  
 ...Почему луна в один месяц проходит  
 Тем же путем круговым, что солнце в год пробегает.  
 ...Можно, во-первых, считать, что все это так происходит,  
 Как полагает о том Демокрита священное мнение.  
 То есть, чем ближе к земле проходят светила, тем меньше  
 Могут они увлекаться вращением небесного вихря,  
 Ибо стремление его и напор, постепенно слабея  
 Книзу, становятся меньше...

Тит Лукреций Кар. О природе вещей

КОНЕЧНО, С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ астрономии рассуждения Лукреция о «небесном вихре» представляются наивными. Но в них содержится «священное мнение»: с ростом расстояния от Земли (а ведь она – «центр Мира») растет и линейная (окружная) скорость – как, например, в случае вращения твердого цилиндра.

Нас будет интересовать возможность использования вращения для разделения веществ. Но... начнем издалека.

Каждый знает, как в ведре речной воды разделить воду, песок и пузырьки: просто надо подождать некоторое время – песчинки осядут на дно, пузырьки всплывут и лопнут над поверхностью, и останется чистая вода. В случае прозрачного сосуда видно, что частицы песка движутся с постоянной скоростью. Это означает, что сумма сил тяжести, архимедовой и сопротивления движению равна нулю.

Правда, это равновесие наступает не сразу. Например, если уронить стальной шарик в банку с водой, или с глицерином, или с медом, то некоторое время скорость его движения будет изменяться, пока не станет постоянной. Это «некоторое время» называется *временем релаксации*  $\tau$ . Говорят, что по истечении времени, значительно превышающего  $\tau$ ,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow 0$$

(здесь  $m$  – масса частицы,  $v$  – ее скорость).

Можно убедиться, что время  $\tau$  будет различным для упомянутых жидкостей, а также и для шариков разного размера в одной и той же жидкости. Если шарик маленький, а жидкость достаточно вязкая, можно считать, что

сила сопротивления пропорциональна скорости движения шарика, так что

$$\frac{\vec{F}_{\text{сопр}}}{m} = -\beta \vec{v}_{\text{отн}}$$

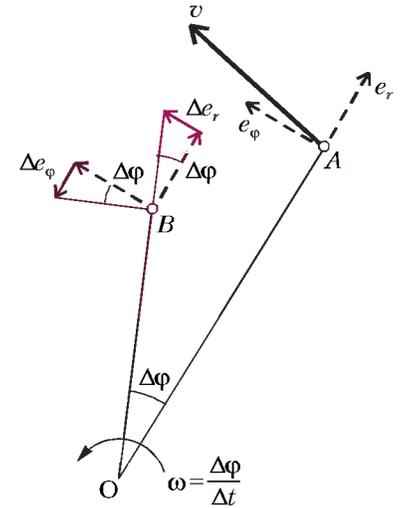
(здесь  $\beta$  – коэффициент, который зависит от свойств жидкости и размера шарика). Такие движения называют ползущими, а соответствующую силу – силой Стокса. В этом соотношении подчеркнуто, что имеется в виду скорость шарика относительно жидкости, которая сама тоже может двигаться с некоторой скоростью  $\vec{V}$ :

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{V}.$$

А что происходит в тумане? Там капельки воды висят в воздухе довольно долго (иногда часами). Но ведь они падают в поле тяготения Земли (сила Архимеда в этом случае пренебрежимо мала: плотность воды на три порядка больше плотности воздуха). Нельзя ли ускорить разделение воздуха и капелек при помощи каких-либо других сил, например центробежной силы инерции? (Напомним, что о силах инерции имеет смысл говорить только в случае неинерциальных систем отсчета.) Эта сила успешно используется, скажем, при разделении масла и простокваши в центрифугах, где исходный продукт – молоко – приводится в быстрое вращение. Конечно, мы не собираемся вращать весь утренний туман над рекой или аэродромом. Такое вращение иногда возникает самостоятельно, например в вихрях, стекающих с крыла самолета при вираже, – их можно наблюдать на Аэрошоу. А можно специально закрутить поток, чтобы избавиться от сконденсировавшейся воды – например, чтобы предотвратить осушить рабочий воздух в

аэродинамических трубах (эта конденсация часто мешает проведению экспериментов). Или чтобы при помощи центробежной сепарации избавиться от микробов, содержащихся в воздухе.

Итак, рассмотрим силы, возникающие при движении частицы (капельки, пылинки) во вращающейся системе координат (см. рисунок). Тут надо поднапрячься и поработать.



Пусть капелька в некоторый момент времени находится в точке A с радиусом-вектором  $\vec{OA}$  относительно центра вращения O. Представим ее скорость  $\vec{v}$  в виде проекций на систему единичных векторов, т.е. ортов,  $\vec{e}_r$  (радиальный) и  $\vec{e}_\phi$  (тангенциальный):

$$\vec{v} = v_r \cdot \vec{e}_r + v_\phi \cdot \vec{e}_\phi.$$

Через некоторый отрезок времени  $\Delta t$  капелька окажется в точке B с другим радиусом-вектором  $\vec{OB}$ . Самое интересное здесь то, что орты  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\phi$  тоже изменятся – конечно, не по величине, поскольку это единичные вектора, а по направлению. Если время  $\Delta t$  мал, угол поворота  $\Delta\phi$  радиуса-вектора капельки тоже мал (на рисунке для наглядности он изображен большим), и орты приобретут малые приращения  $\Delta\vec{e}_r$  и  $\Delta\vec{e}_\phi$ . Интересно сразу отметить, что  $\Delta\vec{e}_r$  направлено вдоль  $\vec{e}_\phi$ , а  $\Delta\vec{e}_\phi$  – против  $\vec{e}_r$ . Эти приращения легко найти из треугольников с малым углом  $\Delta\phi$  при вершине B:

$$\Delta\vec{e}_r = \vec{e}_r \cdot 2\text{tg} \frac{\phi}{2}, \quad \Delta\vec{e}_\phi = \Delta\phi \cdot \vec{e}_\phi,$$

$$\Delta\vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi \cdot 2\text{tg} \frac{\phi}{2}, \quad \Delta\vec{e}_r = -\Delta\phi \cdot \vec{e}_r.$$

Сейчас нам это понадобится, чтобы найти малое изменение скорости капельки:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta v} &= \Delta \left( v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \right) = \\ &= \Delta \left( v_r \cdot \vec{e}_r \right) + \Delta \left( v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \right) = \\ &= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \cdot \Delta \vec{e}_r + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi + v_\varphi \cdot \Delta \vec{e}_\varphi = \\ &= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \Delta \varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi - v_\varphi \Delta \varphi \cdot \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Мы уже подставили сюда выражения для  $\vec{\Delta e}_r$  и  $\vec{\Delta e}_\varphi$ . А теперь, чтобы получить вектор ускорения, разделим все на  $\Delta t$  и сгруппируем слагаемые при единичных векторах  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} &= \vec{e}_r \left( \frac{\Delta v_r}{\Delta t} - v_\varphi \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right) + \\ &+ \vec{e}_\varphi \left( \frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} + v_r \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Ясно, что в скобках получились проекции ускорения капельки в принятой нами вращающейся системе координат. Посмотрим на них внимательнее. Что такое  $\Delta \varphi / \Delta t$ ? Это же угловая скорость  $v_\varphi / r$ ! Используя этот замечательный факт и приравняв радиальную и тангенциальную составляющие ускорения капельки соответствующим составляющим силы сопротивления, деленным на массу, получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_r}{\Delta t} &= \frac{v_\varphi^2}{r} - \beta(v_r - 0), \\ \frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} - \beta(v_\varphi - V_\varphi). \end{aligned}$$

Тут в первом слагаемом правой части первого уравнения легко узнать центростремительное ускорение, а коэффициент  $\beta$  во втором слагаемом можно представить в виде  $\beta = 1/\tau$  (хотя бы из соображений размерностей). Кроме того, мы рассматриваем случай, когда

радиальная составляющая скорости несущего газа равна нулю, а тангенциальная составляющая  $V_\varphi(r)$  — есть произвольная функция радиуса. Такое движение можно, например, осуществить в цилиндрической трубе. А теперь, считая, что капелька очень мала и, значит, быстро «привыкает» к локальным условиям обтекания ее несущей средой, приравняем нулю левые части этих уравнений, т.е. будем рассматривать безынерционное, ползущее движение капельки, аналогичное движению шарика в глицерине. Тогда получим алгебраическую систему уравнений для определения локально установившихся составляющих скорости капельки во вращающейся системе координат:

$$\frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{v_r}{\tau} = 0, \quad \frac{v_\varphi - V_\varphi}{\tau} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0.$$

Чтобы не возиться с точным решением этой системы уравнений, используем физические соображения. Интуитивно ясно, что очень малые частицы будут двигаться по окружности почти с той же скоростью, что и несущая среда:  $v_\varphi \approx V_\varphi$ . Это значит, что частица должна сделать много оборотов вокруг оси при незначительном смещении по радиусу, т.е.  $v_r \ll v_\varphi \approx V_\varphi$ . Принимая значение  $v_\varphi = V_\varphi$  в качестве первого приближения, из первого уравнения получим

$$v_r = \frac{\tau}{r} V_\varphi^2.$$

В частном случае  $V_\varphi = \omega_0 r$  (несущая среда вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  как твердое тело) найдем

$$v_r = \omega_0^2 r \tau.$$

Учитывая, что  $v_r = \Delta r / \Delta t$ , решим полученное уравнение (с начальным условием  $r = r_0$  при  $t = 0$ ) на «большом» времени ( $t \gg \tau$ ):

$$r = r_0 e^{\omega_0^2 \tau t} = r_0 e^{\omega_0 \tau \varphi} = r_0 e^{\frac{2\pi \tau}{T} \varphi},$$

где  $\varphi = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ ,  $T$  — период (хотите — верьте, хотите — проверьте подстановкой). Таким образом, в принятых предположениях частица движется по так называемой логарифмической спирали. (Один Студент, забыв слово «спираль», назвал ее «окружностью переменного радиуса».)

Для тех, кто хочет провести вычисления, разумеется, важно знать, что такое  $\tau$ . Сила сопротивления для шаровой частицы (сила Стокса) равна

$$F_{\text{соп}} = 6\pi\eta a(v - V),$$

где  $a$  — радиус шарика, а  $\eta$  — вязкость, которую можно найти в справочниках (не забудьте обратить внимание на систему единиц). Тогда

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2}{9} \frac{\rho a^2}{\eta},$$

где  $\rho$  — плотность материала частицы. Например, для случая капельки воды ( $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ) радиусом  $a = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$  в воздухе ( $\eta \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$ ) получим

$$\tau \sim 10^{-5} \text{ с}.$$

Сравним это время, например, со временем одного оборота при закрутке воздуха с такими капельками в трубке радиусом  $r_0 = 1 \text{ см}$  с линейной скоростью  $V_\varphi = 100 \text{ м/с}$ . Время одного оборота равно

$$T = \frac{2\pi r_0}{V_\varphi} = 2\pi \cdot 10^{-4} \text{ с},$$

что в шестьдесят раз больше  $\tau$ , так что наши предположения о квазиравновесном движении капельки верны. Отметим, что при этих условиях капелька имеет чудовищное центростремительное ускорение:

$$V_\varphi^2 / r_0 \sim 10^6 \text{ м/с}^2 = 10^5 g!$$

Итак, вращайте воздух в кондиционерах — и вы избавитесь от пыли, капель и микробов.

**Вниманию наших читателей!**

**Только на второе полугодие 2001 года, в порядке исключения, подписка на журнал «Квант» (и Приложения к нему) по странам СНГ проводится в редакции.**

**Адрес редакции: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64 – А**

**Телефоны редакции: 930-56-48, 930-56-41**

# Иррациональные уравнения

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

**И**РРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ довольно часто становятся «каменем преткновения» на вступительных экзаменах. О некоторых методах их решения мы и поговорим, причем в основном будем иметь дело с квадратными корнями (радикалами). Как правило, такая задача решается, если нам удастся избавиться от радикалов и свести ее к «обычным» уравнениям, не содержащим корней.

## Простейшие уравнения

Так мы будем называть уравнения вида

$$1) \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

и

$$2) \sqrt{f(x)} = g(x).$$

Именно к ним сводится в итоге решение большинства уравнений, связанных с квадратными корнями. Избавиться от радикалов в простейших уравнениях можно, возведя их почленно в квадрат. Однако при этом могут появиться посторонние корни, так что надо еще позаботиться об их отсеиве.

Уравнение первого типа равносильно каждой из двух систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

поскольку после возведения в квадрат получаем уравнение-следствие  $f(x) = g(x)$ . Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни области определения исходного уравнения, т.е. выполняется ли неравенство  $f(x) \geq 0$  (или  $g(x) \geq 0$ ). На практике из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще.

Рассмотрим пример.

**Пример 1.** Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}.$$

**Решение.** Находим корни уравнения  $f(x) = g(x)$ :

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку для корней нашего квадратного уравнения  $x^2 - 1 = -x$ , неравенство

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

выполняется при  $x_2 < 0$  и не выполняется при  $x_1 > 0$ .

**Ответ:**  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Обратите внимание на то, что мы при отборе корней обошлись, по сути дела, без непосредственных вычислений.

Уравнение второго типа равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Школьники довольно часто добавляют к этой системе неравенство  $f(x) \geq 0$ . Однако обычно этого делать не нужно (и даже опасно, особенно в задачах с параметром), поскольку условие  $f(x) \geq 0$  автоматически выполняется для корней уравнения  $f(x) = g^2(x)$ , в правой части которого стоит неотрицательное выражение — квадрат функции  $g(x)$ .

**Пример 2.** Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1.$$

**Решение.** После возведения в квадрат получаем уравнение  $2x^2 + x - 3 = 0$ . Его корни  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3/2$ . Условию  $x \geq 1$  удовлетворяет лишь  $x = 1$ .

**Ответ:** 1.

**Пример 3.** Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 2x + 1.$$

**Решение.** После возведения в квадрат и упрощений получаем уравне-

ние

$$x^2 + 6x + 2 = 0$$

с корнями  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{7}$ . Условию

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/2$$

удовлетворяет лишь корень «с плюсом». В этом можно убедиться, заметив, что

$$\begin{aligned} -3 + \sqrt{7} &> -3 + \sqrt{6,25} = \\ &= -3 + 2,5 = -1/2. \end{aligned}$$

Но можно поступить и так. Поскольку при  $x = -1/2$  значение квадратного трехчлена отрицательное:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 2 = \\ &= (-1/2)^2 - 3 + 2 < 0, \end{aligned}$$

число  $x = -1/2$  лежит между его корнями  $x_1$  и  $x_2$ .

Такой прием иногда избавляет от необходимости проводить не очень сложные, но порой утомительные вычисления.

**Ответ:**  $-3 + \sqrt{7}$ .

**Упражнение 1.** Решите уравнения

а)  $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x-2}$ ;

б)  $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{2x^2 - 1}$ ;

в)  $\sqrt{x^2 - 5x - 14} = \sqrt{3x - 2}$ ;

г)  $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 4}$ ;

д)  $\sqrt{x+1} = x - 1$ ;

е)  $\sqrt{2x+1} = 2x^2 - x - 1$ ;

ж)  $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$ ;

з)  $8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 3$ .

## Более сложные уравнения

Если в уравнении имеется несколько радикалов или же их нагромождение вроде  $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$  и т.п., первоначальной целью является избавление от них, что достигается возведением в квадрат (может быть, неоднократно) с тем, чтобы в конце концов прийти к уравнениям, которые мы умеем решать.

**Пример 4.** Решите уравнение

$$\sqrt{8x+9} - \sqrt{7x-5} = 2.$$

**Решение.** Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{8x+9} = 2 + \sqrt{7x-5}$$

и возведем в квадрат. После упрощений получим простейшее уравнение

$$4\sqrt{7x-5} = x + 10, \quad (1)$$

или, после повторного возведения в

квадрат,

$$x^2 - 92x + 180 = 0. \quad (2)$$

Возводить в квадрат число 46 без калькулятора — занятие довольно неприятное. Поэтому попробуем угадать корень. Легко понять (просто перебирая первые квадраты: 1, 4, 9, 16, 25... и приравнявая им двучлен  $7x - 5$  — «наименьший» из подкоренных выражений), что  $x_1 = 2$  удовлетворяет уравнению (1), а значит — и (2). По теореме Виета второй корень уравнения (2) это  $x_2 = 90$ , причем оба корня удовлетворяют второму, а следовательно, и исходному уравнению.

**Замечание.** Вообще в случаях, когда корни, получаемые в результате последовательных возведений в квадрат, достаточно простые (например, целые), можно не заботиться о равносильности переходов и в конце решения просто проверить их прямой подстановкой. В более сложных случаях, когда прямая проверка затруднена, приходится тщательно следить за возможностью появления посторонних корней.

**Пример 5. Решите уравнение**

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3.$$

**Первое решение.** Переписываем уравнение так:

$$\sqrt{3x-1} = 3 + \sqrt{x-2}.$$

Возводим в квадрат и упрощаем:

$$3\sqrt{x-2} = x - 4.$$

Повторное возведение в квадрат дает уравнение

$$x^2 - 17x + 34 = 0$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm 3\sqrt{17}}{2}.$$

Неравенству  $x \geq 4$  удовлетворяет лишь  $x = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$ . (Можно подставить  $x = 4$  в трехчлен  $x^2 - 17x + 34$  — см. конец решения примера 3.)

**Второе решение.** Выполним замену  $t = \sqrt{x-2} \geq 0$ , откуда  $x = t^2 + 2$ . Приводим уравнение к виду

$$\sqrt{3t^2 + 5} = 3 + t.$$

После возведения в квадрат и упрощения получаем

$$t^2 - 3t - 2 = 0, \quad (3)$$

откуда  $t_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$  (второй корень

$t_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$  отрицателен). Теперь вы-

числяем корень исходного уравнения:

$$x = t^2 + 2 = 3t + 4 = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$$

(мы опять воспользовались уравнением (3), для корней которого верно, что  $t^2 + 2 = 3t + 4$ ).

**Ответ:**  $\frac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$ .

Вообще же подстановка вида  $t = \sqrt{ax + b} \geq 0$  часто упрощает решение уравнений вида

$$\sqrt{ax + b} \pm \sqrt{cx + d} = e.$$

После замены получаем уравнение вида  $\sqrt{kt^2 + n} = mt + p$ . Существенно здесь то, что при решении квадратного уравнения

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

к которому приходим после однократного возведения последнего уравнения в квадрат, приходится выявлять лишь неотрицательные корни, что также достаточно просто.

Рассмотрим теперь два уравнения с «двухэтажными радикалами».

**Пример 6. Решите уравнение**

$$\sqrt{2 - \sqrt{x+1}} + \sqrt{2 + \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x}.$$

**Решение.** Возведя уравнение в квадрат и приведя подобные члены, получаем простейшее уравнение

$$\sqrt{3-x} = 2(x-1),$$

решая которое, приходим к ответу.

**Ответ:**  $\frac{7 + \sqrt{33}}{8}$ .

**Пример 7. Решите уравнение**

$$\sqrt{x + \sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$

**Решение.** Пусть  $t = \sqrt{x-1} \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + 1$ , и уравнение принимает вид

$$\sqrt{t^2 + t + 1} + \sqrt{t^2 - 2t + 1} = 2.$$

Заметив, что под вторым знаком радикала стоит  $(t-1)^2$ , получаем

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 2 - |t - 1|.$$

При  $0 \leq t < 1$  имеем

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 1 + t,$$

откуда

$$t = 0, \text{ а } x_1 = 1.$$

При  $t \geq 1$  приходим к уравнению

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 3 - t,$$

единственный корень которого  $t = 8/7$  удовлетворяет условию  $t \geq 1$ . Итак,

$$x_2 = 1 + 64/49 = 113/49.$$

**Ответ:** 1; 113/49.

Рассмотрим еще уравнение с параметром.

**Пример 8. Решите уравнение**

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-2} = a.$$

**Решение.** ОДЗ исходного уравнения:  $x \geq 2$ . При этом  $(2x-1) - (x-2) = x+1 > 0$ , т.е. левая часть исходного уравнения положительна, поэтому  $a \geq 0$ . Пусть  $t = \sqrt{x-2} \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + 2$ , и уравнение приводится к виду

$$\sqrt{2t^2 + 3} = a + t.$$

Возведем в квадрат и упростим:

$$t^2 - 2at + 3 - a^2 = 0. \quad (4)$$

Условие разрешимости этого уравнения дает

$$\frac{D}{4} = 2a^2 - 3 \geq 0,$$

т.е. (учитывая, что  $a > 0$ )  $a \geq \sqrt{3/2}$ , при этом  $t_{1,2} = a \pm \sqrt{2a^2 - 3}$ .

При  $a = \sqrt{3/2}$  уравнение (4) имеет один корень  $t = \sqrt{3/2}$ , а  $x = 3/2 + 2 = 7/2$ .

Если  $\sqrt{3/2} < a \leq \sqrt{3}$ , свободный член уравнения (4) неотрицателен и, следовательно, оба его корня неотрицательны (ведь  $t_1 + t_2 = 2a$ ). Для них

$$x_{1,2} = t_{1,2}^2 + 2 = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

Если же  $a > \sqrt{3}$ , годится только неотрицательный корень (с плюсом), т.е. тогда

$$x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

**Ответ:** корней нет при  $a < \sqrt{3/2}$ ;

$x = 7/2$  при  $a = \sqrt{3/2}$ ;

$x_{1,2} = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}$  при

$\sqrt{3/2} < a \leq \sqrt{3}$ ;

$x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$  при

$a > \sqrt{3}$ .

**Упражнения**

2. Решите уравнения

а)  $\sqrt{8x+1} - \sqrt{x-2} = 4$ ;

б)  $\sqrt{3x+2} - \sqrt{x-1} = 2$ ;

в)  $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$ ;

г)  $\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$ ;

д)  $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$ ;

е)  $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + x + 5} = \sqrt{2x^2 + 2x + 17}$ ;

$$\text{ж) } \sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2;$$

$$\text{з) } \sqrt{9-\frac{9}{x}} = x - \sqrt{x-\frac{9}{x}}.$$

3. Решите уравнения с параметром

$$\text{а) } \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-a} = 2;$$

$$\text{б) } \sqrt{2x+a} - \sqrt{x-1} = a;$$

$$\text{в) } \sqrt{2x+a} - \sqrt{x-a} = 2;$$

$$\text{г) } \sqrt{2x+a} - \sqrt{x-a} = 2a.$$

### Умножим на сопряженное

В основе рассматриваемого способа решения лежит формула

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Выражения  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  и  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  мы будем называть сопряженными. Иногда использование этой формулы облегчает решение.

**Пример 9.** Решите уравнение

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+3} = 2x-1.$$

**Решение.** Домножим левую и правую части уравнения на сумму радикалов, стоящих в левой части. Получается уравнение

$$2(2x-1) = (2x-1)(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3}),$$

равносильное такому:

$$(2x-1)(2 - (\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3})) = 0,$$

откуда либо  $x = 1/2$ , либо

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} = 2.$$

Последнее уравнение решим уже рассмотренным способом: пусть  $t = \sqrt{x+3} \geq 0$ . Тогда приходим к уравнению

$$\sqrt{5t^2-14} = 2-t,$$

откуда  $t = \frac{-1+\sqrt{19}}{2}$ , а  $x = \frac{4-\sqrt{19}}{2}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}.$$

Заметим, что умножение на сумму радикалов в данном случае не приводит к появлению посторонних корней — ведь область определения этой суммы та же, что у исходного уравнения, и она положительна как сумма неотрицательных слагаемых, не обращающихся, очевидно, в ноль одновременно.

Отметим также, что решить уравнение из примера 9 «в лоб» довольно трудно — оно путем громоздких вычислений сводится к уравнению четвертой степени.

Посмотрите, насколько эффективно работает этот метод в двух следующих примерах, которые оказались по силам очень небольшому проценту поступающих.

**Пример 10** (геологический факультет МГУ, 1985). Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}.$$

**Решение.** Пусть  $A = 3x^2-1$ ,  $B = 3x^2+2x+1$ ,  $C = x^2-x+1$ ,  $D = x^2+2x+4$ . Перепишем наше уравнение:

$$\sqrt{C} - \sqrt{D} = \sqrt{B} - \sqrt{A},$$

откуда (так как  $\sqrt{m} - \sqrt{n} = \frac{m-n}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$ ) получаем

$$\frac{C-D}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} = \frac{B-A}{\sqrt{B} + \sqrt{A}}.$$

Поскольку  $C-D = -3(x+1)$ , а  $B-A = 2(x+1)$ , приходим к равенству

$$\frac{-3(x+1)}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} = \frac{2(x+1)}{\sqrt{B} + \sqrt{A}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \left( \frac{2}{\sqrt{B} + \sqrt{A}} + \frac{3}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} \right) = 0,$$

а поскольку второй множитель, очевидно, положителен, имеем  $x = -1$ . Проверкой убеждаемся, что  $x = -1$  — корень данного уравнения.

**Ответ:**  $-1$ .

**Пример 11** (геологический факультет МГУ, 1985). Решите уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

**Указание.** Область определения уравнения:  $x \geq -1/2$ , при таких  $x$  мы можем применить формулу  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ . Поэтому перепишем уравнение так:

$$(\sqrt{2x-1} - 3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2}) = 4.$$

Домножив левую и правую части на разность  $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}$ , получим

$$\sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}.$$

Осталось возвести в квадрат, а затем найти и проверить корни.

**Ответ:** 7.

**Упражнение 4.** Решите уравнения

$$\text{а) } \sqrt{5x+7} - \sqrt{x+4} = 4x+3;$$

$$\text{б) } \sqrt{x^2+3x-2} - \sqrt{x^2-x+1} = 4x-3;$$

$$\text{в) } \sqrt{45x+12} - \sqrt{15x+2} = \sqrt{10}(3x+1);$$

$$\text{г) } \sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = 4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+4};$$

$$\text{д) } \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2+2} = \sqrt{3x^2+2x-3} + \sqrt{x^2+3x-1};$$

$$\text{е) } \sqrt{x^2-9x+24} - \sqrt{6x^2-59x+149} = |5-x|.$$

В школьном курсе математики вы изучали свойства многих элементарных функций. Их иногда можно с успехом применять и при решении уравнений. Ограничимся несколькими примерами.

### Монотонность функций

Начнем с примера.

**Пример 12.** Решите уравнение

$$\sqrt{7x+9} + \sqrt{15x+1} = 9 - \sqrt{2x-1}.$$

**Решение.** Это уравнение можно попытаться решить возведением в квадрат (трижды!). Однако при этом, во-первых, получится уравнение четвертой степени и, во-вторых, его коэффициенты будут ужасны. Попробуем угадать корень. Это сделать нетрудно:  $x = 1$ . Теперь заметим, что левая часть уравнения — возрастающая функция, а правая — убывающая. Но это значит, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Итак,  $x = 1$  — единственный корень.

**Ответ:** 1.

Вообще в случае (это относится не только к иррациональным уравнениям), если уравнение имеет вид

$$f(x) = 0,$$

где  $f(x)$  возрастает (убывает), или

$$f(x) = g(x),$$

где функции  $f(x)$  и  $g(x)$  «встречно монотонны», т.е.  $f(x)$  возрастает, а  $g(x)$  убывает, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если вам удалось заметить это или привести уравнение к такому виду и если вы сможете угадать корень, то он и будет решением данного уравнения.

И еще один любопытный пример.

**Пример 13.** Решите уравнение

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = x.$$

Здесь после освобождения от радикалов получится полное уравнение 4-й степени, так что поищем какой-нибудь другой путь решения.

**Решение.** Пусть  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Наше уравнение имеет вид

$$f(f(x)) = x. \quad (5)$$

Заметим, что функция  $f(x)$  возрастающая, и докажем, что уравнение (5) равносильно уравнению

$$f(x) = x. \quad (6)$$

Для этого заметим, что всякий корень уравнения (6) есть корень уравнения (5). Пусть  $x_0$  — корень уравнения (5), причем  $f(x_0) \neq x_0$ . Тогда либо  $f(x_0) > x_0$ , но при этом  $f(f(x_0)) = x_0 > f(x_0)$ , противоречие; либо  $f(x_0) < x_0$ , но в этом случае  $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$ , т.е.  $x_0 < f(x_0)$ , что также невозможно. Утверждение доказано. Чтобы завершить решение, достаточно решить уравнение  $x = \sqrt{1+x}$ .

**Ответ:**  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Упражнение 5.** Решите уравнения

- а)  $\sqrt{15x+4} + \sqrt{x+1} = 9$ ;
- б)  $x(\sqrt{x^2+3x+5} + \sqrt{x}) = 5 - x^2$ ;
- в)  $\sqrt{x^2+2x+6} + \sqrt{x+3} = 6 - x$ ;
- г)  $x^2 - 3\sqrt{3x+1} = 1$ .

**Область определения**

На следующем примере мы рассмотрим еще один класс задач.

**Пример 14.** Решите уравнение

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}.$$

**Решение.** В области определения данного уравнения должны одновременно выполняться неравенства  $4-x^2 \geq 0$  и  $x \geq 2$ , что возможно только при  $x = 2$ . Проверкой убеждаемся, что это — корень.

**Ответ:** 2.

**Упражнение 6.** Решите уравнения

- а)  $\sqrt{x^2-3x+2} + 2\sqrt{4-x^2} + 1 = \sqrt{x-1}$ ;
- б)  $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{3x^2+4} = 4$ .

**Ограниченность функций**

Здесь мы тоже разберем достаточно характерные примеры.

**Пример 15.** Решите уравнение

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} - x^2 = 5 + 2x.$$

**Решение.** Перепишем уравнение:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} = x^2 + 2x + 5.$$

Пусть  $t = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+5}$ . Тогда

$$t^2 = 8 + 2\sqrt{15-2x-x^2}.$$

Наибольшее значение подкоренного выражения достигается при  $x = -1$  (в вершине параболы  $y = 15 - 2x - x^2$ ). При этом  $t^2 = 16$ . Отсюда следует, что  $t \leq 4$ . Наименьшее значение правой части исходного уравнения достигается также при  $x = -1$  и тоже равно 4. При  $x \neq -1$  левая часть (когда она

существует) меньше правой.

**Ответ:** -1.

И наконец, еще один пример, в решении которого мы воспользуемся свойством суммы двух взаимно обратных положительных чисел:  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ , причем равенство достигается  $a$  лишь при  $a = 1$ .

**Пример 16.** Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}} = \sqrt{4x-x^2}.$$

**Решение.** Пусть  $t = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} > 0$ .

Левая часть уравнения, равная  $t + \frac{1}{t}$ , больше или равно 2:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2,$$

а правая часть не больше 2:

$$\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(x-2)^2} \leq 2.$$

Поэтому равенство возможно только при  $x = 2$ . Проверкой убеждаемся, что  $x = 2$  — корень.

**Ответ:** 2.

**Упражнение 7.** Решите уравнения

- а)  $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$ ;
- б)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6$ .

# Корпускулярные и волновые свойства света

**В. МОЖАЕВ**

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ задачи, в которых проявляются либо корпускулярные, либо волновые свойства света. Действительно, в таких оптических явлениях, как излучение или поглощение света веществом, фотоэлектрический эффект или эффект Комптона, проявляются корпускулярные свойства света. В этих случаях свет ведет себя как поток световых частиц — фотонов, обладающих

энергией  $E$  и импульсом  $p = E/c$  (где  $c$  — скорость света). А вот такие оптические явления, как интерференция или дифракция, явно свидетельствуют в пользу волновых представлений, когда свет ведет себя как электромагнитная волна с частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda = c/\nu$ . Отметим, что известные соотношения  $E = h\nu$  и  $p = h\nu/c$  (где  $h$  — постоянная Планка) как раз и связывают волновые и корпускуляр-

ные свойства света: правые части равенств содержат типичную для волновых представлений величину  $\nu$ , а левые — характерные для потока частиц величины  $E$  и  $p$ .

А теперь — несколько конкретных задач.

**Задача 1.** Рубиновый лазер, работающий в импульсном режиме с длительностью импульса  $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$  с, излучает параллельный пучок света с энергией  $E = 1$  Дж. Определите силу светового давления на шарик, освещаемый этим светом, если диаметр шарика равен (или больше) диаметру лазерного пучка, а поверхность шарика полностью поглощает падающее на нее излучение.

До поглощения лазерного излучения импульс шарика был равен нулю:  $p_1 = 0$ . После поглощения фотонов за время  $\tau$  шарик приобрел импульс  $p_2 = E/c$ . Сила  $F$ , которая действовала на шарик со стороны фотонов, равна

$$F = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{p_2 - p_1}{\tau} = \frac{E}{c\tau} = 6,7 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

Заметим, что, давление света – одно из немногих оптических явлений, которое одинаково хорошо объясняется и корпускулярными, и волновыми представлениями о свете.

**Задача 2.** На плоскую поверхность тонкой плосковыпуклой линзы нанесено абсолютно отражающее покрытие. На выпуклую поверхность этой линзы падает узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией  $E = 4$  Дж и длительностью импульса  $\tau = 10^{-4}$  с. Падающий пучок распространяется параллельно главной оптической оси линзы на расстоянии  $h = F/2\sqrt{3}$  от оси, где  $F$  – фокусное расстояние линзы. Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина на энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхности линзы без покрытия пренебречь.

Параллельный главной оптической оси пучок света проходит линзу, затем отражается от зеркального покрытия и снова проходит линзу. С помощью формулы линзы и законов отражения света от плоского зеркала легко показать, что выходящий из линзы пучок пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии  $F/2$  от линзы, образуя с осью угол  $\alpha = 30^\circ$ . Абсолютная величина суммарного импульса фотонов, падающих на линзу, равна  $p_1 = E/c$ , а импульс пучка на выходе из линзы равен  $p_2 = E/(2c)$ . На рисунке 1 изображена векторная диаграмма,

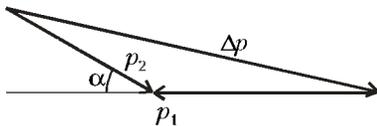


Рис. 1

на которой построен вектор изменения импульса фотонов после прохождения линзы:  $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ . Изменение импульса фотонов по абсолютной величине равно

$$\begin{aligned} \Delta p &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{\frac{E^2}{c^2} + \frac{E^2}{4c^2} + 2 \frac{E}{c} \cdot \frac{E}{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \frac{E}{2c} \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Средняя сила, которая подействовала на фотоны, равна

$$F_\Phi = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{E\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{2c\tau} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

Сила, равная ей по величине, но направленная в противоположную сторону, будет средней силой, которая действует на линзу со стороны фотонов.

**Задача 3.** При некотором минимальном значении задерживающей разности потенциалов на вакуумном фотоэлементе фототок в цепи прекращается, когда поверхность катода освещается светом с некоторой (неизвестной) длиной волны  $\lambda_0$ . Если изменить длину волны света в  $\alpha = 2$  раза, то для прекращения фототока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в  $\beta = 3$  раза. Определите  $\lambda_0$ , если известно, что работа выхода для материала катода равна  $A = 1,89$  эВ. Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Фототок прекращается, когда самые быстрые фотоэлектроны – их кинетическая энергия равна  $hc/\lambda - A$ , а скорость направлена перпендикулярно поверхности катода – при данной задерживающей разности потенциалов  $U_3$  уже не могут долететь до анода. В аналитической форме это условие имеет вид

$$eU_3 \geq \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Наши два случая сводятся к таким двум уравнениям:

$$eU_{30} = \frac{hc}{\lambda_0} - A,$$

$$e\beta U_{30} = \frac{hc}{\lambda_0/\alpha} - A.$$

Из совместного решения этих уравнений находим

$$\lambda_0 = \frac{(\beta - \alpha)hc}{(\beta - 1)A} = \frac{hc}{2A} = 0,33 \text{ мкм}$$

(мы учли, что  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж).

**Задача 4.** Из тонкой линзы диаметром  $D = 2,5$  см с фокусным расстоянием  $F = 50$  см вырезали центральную полоску шириной  $a = 0,5$  см (рис.2), после чего обе половинки линзы сдвинули до соприкосновения – такую систему называют билинзой. Точечный источник света  $S$  с длиной волны  $\lambda = 500$  нм расположен на оси системы в фокальной плоскости линзы (рис.3). На каком расстоянии  $L$  от билинзы следует расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимально возможное число интерференционных полос? Определите ширину  $\Delta x$  интерференционных полос и их число. Определите также допустимую немонохроматичность  $\Delta\lambda$  источника света в этой интерференционной схеме, необходимую для наблюдения всех интерференционных полос.

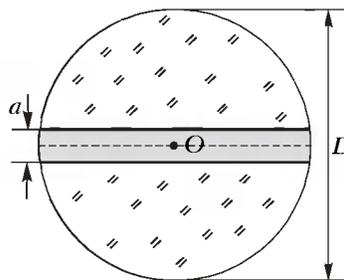


Рис. 2

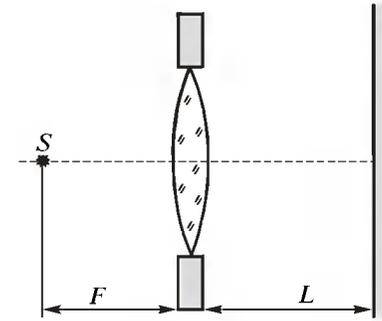


Рис. 3

нули до соприкосновения – такую систему называют билинзой. Точечный источник света  $S$  с длиной волны  $\lambda = 500$  нм расположен на оси системы в фокальной плоскости линзы (рис.3). На каком расстоянии  $L$  от билинзы следует расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимально возможное число интерференционных полос? Определите ширину  $\Delta x$  интерференционных полос и их число. Определите также допустимую немонохроматичность  $\Delta\lambda$  источника света в этой интерференционной схеме, необходимую для наблюдения всех интерференционных полос.

После прохождения каждой части линзы свет выйдет в виде параллельного пучка под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту. На рисунке 4 показан ход лучей, прошедших через верхний сегмент линзы. Оптический центр  $O$  (см. рис.2) исходной линзы является оптическим центром  $O'$  для верхнего сегмента линзы. Поэтому по выходе из линзы пучок света пойдет под углом  $\alpha = \text{arctg}(a/(2F)) = a/(2F)$  (угол  $\alpha$  мал). Параллельный пучок света, выходящий из нижнего сегмента линзы (на рисунке 6 этот сегмент не нарисован), идет под углом  $\alpha' = \alpha$ .

Эти два параллельных пучка света когерентны, поскольку они получены от одного источника. Интерференционная картина будет иметь место в той части экрана, где будет происходить перекрытие пучков. Интерференционные полосы на экране будут расположены горизонтально и перпендикулярно плоскости рисунка.

Ширина интерференционных полос (т.е. расстояние между соседними максимумами) не зависит от расстояния экрана до билинзы и определяется только углом сходимости  $\varphi$  interfering пучков и длиной волны света  $\lambda$  (см. «Квант», 2000, №6, с.31). Для данной оптической схемы  $\varphi = 2\alpha$  и ширина интерференционных полос

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda F}{a} = 50 \text{ мкм.}$$

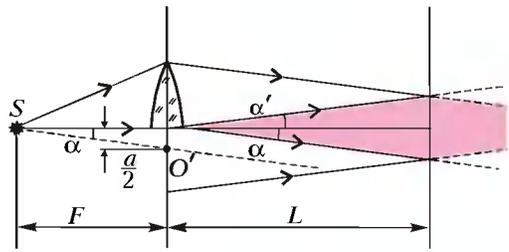


Рис. 4

Максимально возможное число интерференционных полос будет наблюдаться на экране в тот момент, когда экран расположен в области максимального перекрытия пучков, как это и изображено на рисунке 4. Из геометрических соображений следует, что

$$L = \frac{(D - a)}{4 \operatorname{tg} a} \approx \frac{(D - a)F}{2a} = 1 \text{ м.}$$

Тогда максимальное число интерференционных полос равно

$$N_{\max} = \frac{(D - a)a}{2\lambda F} = 200.$$

Поскольку интерференционная картина симметрична относительно горизонтальной оси, то крайние интерференционные полосы будут иметь максимальный порядок интерференции  $m_{\max} = N_{\max} / 2 = 100$ .

Если источник света S квазимонохроматический, то мы будем отчетливо наблюдать на экране все интерференционные полосы. Но если источник света не монохроматический и его спектральный состав включает в себя длины волн в интервале от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , то это приводит к ограничению количества наблюдаемых полос. Попробуем разобраться, какое влияние оказывает на интерференционную картину некогерентность интерферирующих пучков света.

Мы знаем, что ширина интерференционных полос пропорциональна длине волны интерферирующих лучей. Следовательно, в случае света, состоящего из набора различных длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , мы будем иметь наложение интерференционных картин с разными ширинами интерференционных полос. На рисунке 5 изображено распределение интенсивности в интерференционной картине

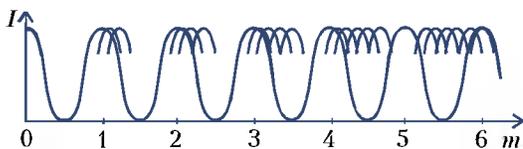


Рис. 5

от нулевого максимума до максимума  $m$ -го порядка (в нашем случае  $m = 6$ ). Черным цветом нарисовано распределение интенсивности для длины волны  $\lambda$ , а красным цветом показаны положения максимумов для длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$ . По мере увеличения  $m$  максимум для  $\lambda + \Delta\lambda$  все больше отходит от максимума для  $\lambda$ , и, наконец, при некотором  $m$  максимум интенсивности

$m$ -го порядка для длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  совпадает с максимумом  $(m + 1)$ -го порядка для длины волны  $\lambda$ . Учитывая, что между этими максимумами расположены максимумы других длин волн (от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ ), очевидно, что при данном  $m$  интерференционная картина будет полностью размыта. То значение  $m$ , при котором интерференционная картина пропадает, можно найти из условия

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda,$$

откуда

$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Это означает, что, если мы хотим наблюдать интерференционные полосы вплоть до  $m$ -го порядка, степень некогерентности должна быть не хуже чем  $\lambda/m$ . Допустимая некогерентность источника света в нашей задаче составляет

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} = 5 \text{ нм.}$$

К вопросу о влиянии некогерентности излучения на интерференционную картину можно подойти с другой стороны. Идеальных гармонических колебаний, которые длятся бесконечно долго, в природе не существует. В реальных колебательных системах время рождения фотонов мало, но оно конечно. Например, время излучения фотона возбужденным атомом составляет примерно  $10^{-8}$  с. Тогда длина излучаемого цуга (участка гармонических колебаний) составляет 3 м. В радиофизике устанавливается связь между временем излучения цуга  $\tau$  и степенью некогерентности такого излучения  $\Delta\lambda$ :

$$\tau \cdot \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2} \sim 1,$$

где  $\lambda$  — средняя длина волны. Второй множитель есть не что иное как разброс по частоте:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \Delta\nu = -\frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Следовательно, если степень некогерентности света  $\Delta\lambda$ , то длина цуга  $l = \tau c = \lambda^2 / \Delta\lambda$ . Рассмотрим

максимум интерференционной картины  $m$ -го порядка. Он образован двумя идентичными цугами, расстояние между которыми равно  $m\lambda$ . Если это расстояние больше или равно длине цуга (в этом случае цуги не перекрываются), то интерференции нет, а имеет место простое сложение интенсивностей обоих цугов. Приравняв разность хода и длину цуга, получим

$$m_{\max} \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad \text{и} \quad m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Наблюдаемый максимальный интерференционный порядок в интерференционной картине позволяет оценить длину цуга:  $l = \tau c = m_{\max} \lambda$ .

### Упражнения

1. Катод вакуумного фотоэлемента облучается световым пучком с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм и мощностью  $W = 1$  Вт. При больших ускоряющих напряжениях между катодом и анодом фототок достигает насыщения (все электроны, выбитые с поверхности катода в единицу времени, достигают анода). При этом ток насыщения равен  $I_{\text{н}} = 4$  мА. Какое количество  $n$  фотонов приходится на один фотоэлектрон? Заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

2. Найдите изменение длины волны света, излучаемого неподвижным атомом водорода вследствие отдачи, которую испытывает ядро атома со стороны вылетевшего кванта света. Укажите: учесть, что энергия ионизации атома водорода много меньше энергии покоя протона.

3. Источник света S расположен на расстоянии  $L = 1$  м от тонкой слюдяной пластинки толщиной  $H = 0,1$  мм с показателем преломления  $n = 1,4$  (рис. 6). На таком же расстоянии от пластинки расположен небольшой экран Э, ориентированный перпендикулярно отраженным

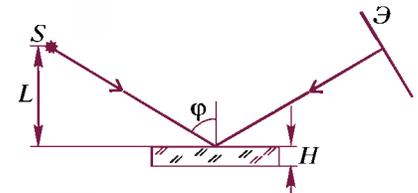


Рис. 6

лучам, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Угол  $\varphi = 60^\circ$ . Найдите порядок  $m$  интерференционной полосы в центре экрана и ширину интерференционных полос. Оцените также допустимую некогерентность источника. Используется зеленый свет с длиной волны  $\lambda = 560$  нм.

# XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Какобычно, в дни школьных весенних каникул прошел зональный этап Всероссийской математической олимпиады. Волимпиаде, проходившей в Иванове, Курске, Омске и Челябинске, участвовали более 400 школьников – победителей областных (краевых, республиканских) олимпиад. А с 19 по 26 апреля в Твери был проведен заключительный этап олимпиады, в котором приняли участие 198 победителей зонального этапа и школьников из Болгарии.

Варианты заданий оказались достаточно сложными, и, хотя каждую задачу решили, как минимум, семеро, только три участника сумели решить все восемь задач. Это десятиклассники Егор Куликов и Юрий Кудряшов, а также выступавший по 11 классу двукратный победитель Международных математических олимпиад Владимир Барзов из Болгарии.

Отметим высокие творческие достижения участников олимпиады: было предложено множество оригинальных решений, некоторые из которых не были известны членам жюри.

По результатам олимпиады жюри определило состав команды России на 42 Международную математическую олимпиаду. В нее вошли Сергей Спиридонов (Ижевск), Алексей Глазырин (Челябинск), Михаил Гарбер (Ярославль), Андрей Халавин (Киров), Сергей Соколов (Рыбинск) и Андрей Воробьев (Санкт-Петербург).

Ниже приводятся условия задач зонального и заключительного этапов и список призеров олимпиады.

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

### Зональный этап

8 класс

1. Можно ли числа 1, 2, ..., 10 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов?

*Р. Женодаров*

2.  $N$  цифр – единицы и двойки – расположены по кругу. Изображенным назовем число, образованное несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении  $N$  среди изображенных могут оказаться все четырехзначные числа, запись которых состоит только из цифр 1 и 2 (в том числе 1111 и 2222)?

*С. Волчѐнков*

3. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы этого пятиугольника прилегают к одной его стороне.

*Д. Джукич*

4. Уголок размера  $n \times m$ , где  $m, n \geq 2$ , называется фигура, получаемая из прямоугольника размера  $n \times m$  клеток удалением прямоугольника размера  $(n-1) \times (m-1)$  клеток.

Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрасивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

*Д. Храпцов*

5. Пусть  $a, b, c, d, e$  и  $f$  – некоторые числа, причем  $ace \neq 0$ . Известно, что  $|ax + b| + |cx + d| = |ex + f|$  при всех значениях  $x$ . Докажите, что  $ad = bc$ .

*Р. Женодаров*

6. Натуральное число  $n$  назовем *хорошим*, если каждое из чисел  $n, n+1, n+2$  и  $n+3$  делится на сумму своих цифр. (Например,  $n = 60398$  – хорошее.) Обязательно ли предпоследней цифрой хорошего числа, оканчивающегося восьмеркой, будет девятка?

*В. Замков*

7. Можно ли клетки доски  $5 \times 5$  покрасить в 4 цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее чем в 3 цвета?

*О. Подлипский*

8. Докажите, что любой треугольник можно разрезать не более чем на 3

части, из которых складывается равнобедренный треугольник.

*Л. Емельянов*

9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют (увеличивают или уменьшают) один из коэффициентов  $a$  или  $b$  квадратного трехчлена  $f = x^2 + ax + b$ : Петя на 1, Коля – на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трехчлен, имеющий целый корень. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах  $a$  и  $b$  независимо от игры Пети?

*Н. Агаханов*

3. В параллелограмме  $ABCD$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = NC$ ,  $Q$  – точка пересечения отрезков  $AN$  и  $CM$ . Докажите, что  $DQ$  – биссектриса угла  $D$ .

*Л. Емельянов*

4. Мишень представляет собой треугольник, разбитый тремя семействами параллельных прямых на 100 равных правильных треугольничков с единичными сторонами. Снайпер стреляет по мишени. Он целится в треугольничек и попадает либо в него, либо в один из соседних с ним по стороне. Он видит результаты своей стрельбы и может выбирать, когда стрельбу заканчивать. Какое наибольшее число треугольничков он может с гарантией поразить ровно по пять раз?

*Ю. Лифшиц*

5. Внутри выпуклого пятиугольника выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что внутри него попадут обе выбранные точки.

*В. Дольников*

6. Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль?

*А. Храбров*

7. Окружность, вписанная в угол с вершиной  $O$ , касается его сторон в точках  $A$  и  $B$ ,  $K$  – произвольная точка на меньшей из двух дуг  $AB$  этой окружности. На прямой  $OB$  взята точка  $L$  такая, что прямые  $OA$  и  $KL$  параллельны. Пусть  $M$  – точка пересечения окружности  $\omega$ , описанной около треугольника  $KLB$ , с прямой  $AK$ , отличная от  $K$ . Докажите, что прямая  $OM$  касается окружности  $\omega$ .

*С.Берлов, П.Кожевников*

8. Саша написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.

*А.Голованов*

10 класс

1. Длины сторон многоугольника равны  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Квадратный трехчлен  $f(x)$  таков, что  $f(a_1) = f(a_2 + \dots + a_n)$ . Докажите, что верны все равенства вида  $f(A) = f(B)$ , где  $A$  – сумма длин любых нескольких сторон многоугольника,  $B$  – сумма длин остальных его сторон.

*Н.Агаханов*

2. В параллелограмме  $ABCD$  на диагонали  $AC$  отмечена точка  $K$ . Окружность  $s_1$  проходит через точку  $K$  и касается прямых  $AB$  и  $AD$ , причем вторая точка пересечения  $s_1$  с диагональю  $AC$  лежит на отрезке  $AK$ . Окружность  $s_2$  проходит через точку  $K$  и касается прямых  $CB$  и  $CD$ , причем вторая точка пересечения  $s_2$  с диагональю  $AC$  лежит на отрезке  $KC$ . Докажите, что при всех положениях точки  $K$  на диагонали  $AC$  прямые, соединяющие центры окружностей  $s_1$  и  $s_2$ , будут параллельны между собой.

*Т.Емельянова*

3. Опишите все способы покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов так, что если числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  (не обязательно различные) удовлетворяют условию  $2000(a+b) = c$ , то все они либо одного цвета, либо трех разных цветов.

*Ю.Лифшиц*

4. Проведены три семейства параллельных прямых, по 10 прямых в каждом. Какое наибольшее число треугольников они могут вырезать из плоскости?

*Ю.Лифшиц*

5.  $a$ ,  $b$  и  $c$  – целые числа,  $c \neq b$ . Известно, что квадратные трехчлены  $ax^2 + bx + c$  и  $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$  имеют общий корень (не обя-

зательно целый). Докажите, что  $a + b + 2c$  делится на 3.

*А.Храбров*

6. Дан треугольник  $ABC$ . На прямой  $AC$  отмечена точка  $B_1$  так, что  $AB = AB_1$ , при этом  $B_1$  и  $C$  находятся по одну сторону от  $A$ . Через точки  $C$ ,  $B_1$  и основание биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  проводится окружность  $\omega$ , вторично пересекающая окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $Q$ . Докажите, что касательная, проведенная к  $\omega$  в точке  $Q$ , параллельна  $AC$ .

*Л.Емельянов*

7. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связанным*, если из любой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связанное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

*И.Певзнер*

8. На окружности расположена тысяча непересекающихся интервалов, и в каждом из них написаны два натуральных числа. Сумма чисел каждого интервала делится на произведение чисел интервала, соседнего слева. Каково наибольшее возможное значение наибольшего из написанных чисел?

*В.Сендеров*

11 класс

1. Найдите все простые числа  $p$  и  $q$  такие, что  $p + q = (p - q)^3$ .

*Р.Женодаров*

2. Приведенный квадратный трехчлен  $f(x)$  имеет два различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение  $f(f(x)) = 0$  имеет ровно три различных корня, а уравнение  $f(f(f(x))) = 0$  – ровно семь различных корней?

*Н.Агаханов, О.Подлипский*

3. Пусть  $AD$  – биссектриса треугольника  $ABC$  и прямая  $l$  касается окружностей, описанных около треугольников  $ADB$  и  $ADC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков  $BD$ ,  $DC$  и  $MN$ , касается прямой  $l$ .

*Н.Седракиян*

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Дана последовательность  $\{x_k\}$  такая, что  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$ . Докажите, что последовательность непериодична.

(Последовательность называется периодической, если она имеет период, начиная с некоторого, не обязательно первого номера.)

*А.Голованов*

6. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из вершин некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из вершин скрепляющегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

*Фольклор*

7. На плоскости дано бесконечное множество точек  $S$ , при этом в любом квадрате  $1 \times 1$  лежит конечное число точек из множества  $S$ . Докажите, что найдутся две разные точки  $A$  и  $B$  из  $S$  такие, что для любой другой точки  $X$  из  $S$

$$|XA| \cdot |XB| \geq 0,999|AB|.$$

*Р.Карасёв*

8. Докажите, что в любом множестве, состоящем из 117 попарно различных трехзначных чисел, можно выбрать 4 попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны.

*Д.Храмцов, Г.Челноков*

### Заключительный этап

9 класс

1. Числа от 1 до 999999 разбиты на две группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую – числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?

*Н.Агаханов*

2. Два многочлена  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  и  $Q(x) = x^2 + px + q$  принимают отрицательные значения на некотором интервале  $I$  длины более 2, а вне  $I$  – неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка  $x_0$ , что  $P(x_0) < Q(x_0)$ .

*Н.Агаханов*

3. Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $K$  таким образом, что середина отрезка  $AD$  равноудалена от точек  $K$  и  $C$ , а середина отрезка  $CD$  равноудалена от точек  $K$  и  $A$ . Точка  $N$  – середина отрезка  $BK$ . Докажите, что углы  $NAK$  и  $NCK$  равны.

*С.Берлов*

4. Дан 2000-угольник, никакие три диагонали которого не пересекаются в

одной точке. Каждая из его диагоналей покрашена в один из 999 цветов. Докажите, что существует треугольник, все стороны которого целиком лежат на диагоналях одного цвета. (Вершины треугольника не обязательно должны оказаться вершинами исходного многоугольника.)

*Ю.Лифшиц*

5. Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трехкопеечных монет?

*Ю.Лифшиц*

6. См. задачу М1792 «Задачника «Кванта».

7. На большей стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $N$  так, что серединные перпендикуляры к отрезкам  $AN$  и  $NC$  пересекают стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Докажите, что центр  $O$  описанной около треугольника  $ABC$  окружности лежит на окружности, описанной около треугольника  $KBM$ .

*С.Берлов*

8. Найдите все нечетные натуральные  $n$  ( $n > 1$ ) такие, что для любых взаимно простых делителей  $a$  и  $b$  числа  $n$  число  $a + b - 1$  также является делителем  $n$ .

*Д.Джукич*

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса

2. См. задачу М1794 «Задачника «Кванта».

3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке  $N$ . Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке  $K$ , пересекает внешнюю окружность в точках  $A$  и  $B$ . Пусть  $M$  — середина дуги  $AB$ , не содержащей точку  $N$ . Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника  $BMK$ , не зависит от выбора точки  $K$  на внутренней окружности.

*Т.Емельянова*

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный не самопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после

этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.

*Д.Картов*

5. Многочлен  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  имеет три различных действительных корня, а многочлен  $P(Q(x))$ , где  $Q(x) = x^2 + x + 2001$ , действительных корней не имеет. Докажите, что  $P(2001) > \frac{1}{64}$ .

*Д.Герёшин*

6. См. задачу М1793 «Задачника «Кванта».

7. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1, C_1$ , отличные от точки пересечения высот  $H$  и такие, что сумма площадей треугольников  $ABC_1, BSA_1, CAB_1$  равна площади треугольника  $ABC$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $A_1B_1C_1$ , проходит через точку  $H$ .

*С.Берлов*

8. Найдите все натуральные числа  $n$  такие, что для любых двух его взаимно простых делителей  $a$  и  $b$  число  $a + b - 1$  также является делителем  $n$ .

*Д.Джукич*

11 класс

1. Пусть  $2S$  — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число  $k$  *средним*, если в наборе можно выбрать  $k$  гирек, суммарный вес которых равен  $S$ . Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?

*Д.Кузнецов*

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. На плоскости даны два таких конечных набора выпуклых многоугольников  $P_1$  и  $P_2$ , что любые два многоугольника из разных наборов имеют общую точку, и в каждом из двух наборов  $P_1$  и  $P_2$  есть пара непересекающихся многоугольников. Докажите, что существует прямая, пересекающая все многоугольники обоих наборов.

*В.Дольников*

4. Участникам тестовой олимпиады было предложено  $n$  вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участниками баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определять слож-

ность вопросов, чтобы места между участниками распределялись любым наперед заданным образом.

При каком наименьшем числе участников это могло быть?

*С.Токарев*

5. Приведенные квадратные трехчлены  $f(x)$  и  $g(x)$  принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах, причем концы этих интервалов — различные точки. Докажите, что найдутся такие положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что для любого действительного  $x$  будет выполняться неравенство

$$\alpha f(x) + \beta g(x) > 0.$$

*С.Берлов, О.Подлинский*

6.  $a$  и  $b$  — различные натуральные числа такие, что  $ab(a+b)$  делится на  $a^2 + ab + b^2$ . Докажите, что  $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$ .

*С.Берлов*

7. В стране 2001 город, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит хотя бы одна дорога и нет города, соединенного дорогами со всеми остальными. Назовем множество городов  $D$  *доминирующим*, если любой не входящий в  $D$  город соединен дорогой с одним из городов множества  $D$ . Известно, что в любом доминирующем множестве хотя бы  $k$  городов. Докажите, что страну можно разбить на  $2001 - k$  республик так, что никакие два города из одной республики не будут соединены дорогой.

*В.Дольников*

8. Сфера с центром в плоскости основания  $ABC$  тетраэдра  $SABC$  проходит через вершины  $A, B$  и  $C$  и вторично пересекает ребра  $SA, SB$  и  $SC$  в точках  $A_1, B_1$  и  $C_1$  соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $O$  — центр сферы, описанной около тетраэдра  $SA_1B_1C_1$ .

*Л.Емельянов*

## Призеры олимпиады

### Дипломы I степени

#### по 9 классам получили

*Волков Юрий* – Кемерово, Классический лицей,  
*Смирнов Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Дубашинский Михаил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

#### по 10 классам –

*Куликов Егор* – Ярославль, школа 33,  
*Рахнев Добромир* – Болгария, Пловдив, Пловдивская математическая школа,  
*Каленков Максим* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Кудряшов Юрий* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Сухов Кирилл* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

#### по 11 классам –

*Барзов Владимир* – Болгария, София, Софийская математическая гимназия,  
*Стиридонов Сергей* – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,  
*Глазырин Алексей* – Челябинск, лицей 11,  
*Гарбер Михаил* – Ярославль, школа 33,  
*Гусев Глеб* – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,  
*Румянцев Андрей* – Москва, СУНЦ МГУ.

### Дипломы II степени

#### по 9 классам получили

*Бугаев Дмитрий* – Омск, лицей 64,  
*Ширяев Дмитрий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Костин Михаил* – Челябинск, ФМЛ 31,  
*Гравин Николай* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Томин Дмитрий* – Иваново, лицей 33;

#### по 10 классам –

*Ватев Кирилл* – Долгопрудный, ФМШ 5,  
*Бадзян Андрей* – Челябинск, ФМЛ 31,  
*Кобзев Владимир* – Белорезк, Компьютерная школа,  
*Левин Михаил* – Ростов-на-Дону, гимназия 36,  
*Пономарева Надежда* – Екатеринбург, гимназия 9,  
*Жеребцов Николай* – Калуга, школа 46;

#### по 11 классам –

*Воробьев Андрей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Соколов Сергей* – Рыбинск, школа 30,  
*Халявин Андрей* – Киров, ФМЛ,  
*Гарбер Алексей* – Ярославль, школа 33,  
*Столбов Василий* – Кирово-Чепецк, гимназия,  
*Акопян Арсений* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Дилев Славомир* – Болгария, Варна, математическая гимназия,  
*Бурков Евгений* – Нижний Новгород, гимназия 63,  
*Ицьясон Дмитрий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

### Дипломы III степени

#### по 9 классам получили

*Куюмджиян Каринэ* – Ростов-на-Дону, школа 8,  
*Костин Андрей* – Челябинск, ФМЛ 31,  
*Вершинина Анастасия* – Киров, ФМЛ,  
*Родионов Павел* – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,  
*Горин Вадим* – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,  
*Гайфуллин Сергей* – Раменское, муниципальная гимназия,  
*Никитин Сергей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Лазеев Владимир* – Тамбов, МПЛ,  
*Ломоносов Роман* – Краснодар, школа 89,  
*Старолетов Алексей* – Барнаул, гимназия 42,  
*Вальтман Виталий* – Санкт-Петербург, АГ СПбГУ,  
*Молчанов Евгений* – Краснодар, школа 64,  
*Солодуха Иван* – Санкт-Петербург, АГ СПбГУ,  
*Петухова Надежда* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,  
*Миргасимов Алмаз* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Васильев Сергей* – Екатеринбург, школа 68,  
*Семущин Иван* – Киров, ФМЛ,  
*Панов Михаил* – Рыбинск, школа 28,  
*Аншпов Дмитрий* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,  
*Баутин Григорий* – Нижний Новгород, ФМЛ 40;

#### по 10 классам –

*Стожков Владимир* – Рыбинск, лицей 2,

*Жданов Роман* – Краснодар, лицей КГТУ,  
*Корсаков Артем* – Челябинск, ФМЛ 31,  
*Хозин Михаил* – Нижний Новгород, ФМЛ 40,  
*Близнашки Никифор* – Болгария, София, Софийская математическая гимназия,  
*Новицкий Антон* – Долгопрудный, ФМШ 5,  
*Сороцкий Евгений* – Санкт-Петербург, гимназия 70,  
*Держач Мария* – Калуга, гимназия 24,  
*Данилов Александр* – Ижевск, Экономико-математический лицей,  
*Захарова Виктория* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Телятник Андрей* – Долгопрудный, ФМШ 5,  
*Позовной Олег* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Порсев Анатолий* – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41;

**по 11 классам –**

*Рочев Игорь* – Ухта, Технический лицей,  
*Андреев Николай* – Болгария, София, Софийская математическая гимназия,  
*Посов Илья* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Смирнов Филипп* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Медвинский Михаил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,  
*Стырт Олег* – Омск, лицей 64,  
*Трофимов Вадим* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Межиров Илья* – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,  
*Целков Цено* – Болгария, София, Софийская математическая гимназия.

Публикацию подготовили  
Н.Агаханов, Д.Терешин

# XXXV Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 19 по 26 апреля 2001 года в Саратове состоялся заключительный этап XXXV Всероссийской физической олимпиады школьников. В нем участвовали 59 девятиклассников, 62 десятиклассника и 64 одиннадцатиклассника.

Ниже приводятся условия теоретических и экспериментальных задач заключительного этапа и список призеров олимпиады.

## Теоретический тур

9 класс

1. С высокого берега озера за веревку подтягивают лодку (рис.1). К веревке привязан флажок С. В момент, когда флажок оказался посередине участка АВ, веревка была направлена под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Найдите скорость флажка в этот момент,

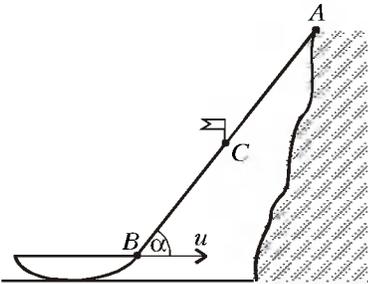


Рис. 1

если известно, что скорость лодки составляла  $u = 1$  м/с. Веревка нерастяжима.

И. Иоголевич

2. Горизонтальная платформа массой  $M = 300$  г подвешена на резиновом жгуте АВ, как показано на рисунке 2. Жгут проходит сквозь отверстие в грузе массой  $m = 100$  г. Система находится в равновесии. Затем груз отпускают без начальной скорости с высоты  $h$

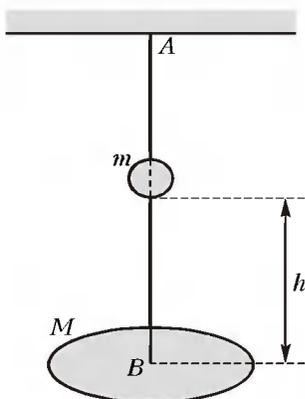


Рис. 2

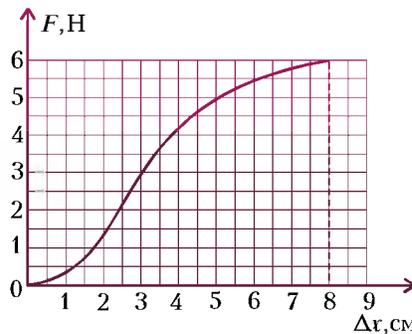


Рис. 3

относительно платформы. Найдите, при каком минимальном значении  $h_{\min}$  жгут порвется, если его максимально допустимое удлинение  $\Delta x_{\max} = 8$  см. Зависимость силы натяжения жгута от его удлинения приведена на рисунке 3. Удар груза о платформу считать абсолютно неупругим.

А. Чудновский

3. В теплоизолированном сосуде находится смесь воды и льда при температуре  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Через стенку в сосуд вводится торец медного стержня, боковые стенки которого покрыты теплоизолирующим слоем. Другой торец стержня погружен в воду, кипящую при атмосферном давлении. Через время  $\tau_m = 15$  мин весь лед в сосуде растаял. Если бы вместо медного стержня в этом эксперименте был использован стальной стержень того

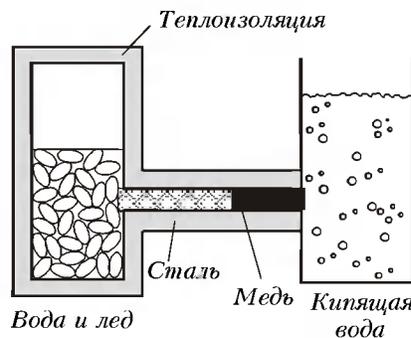


Рис. 4

же сечения, но другой длины, то весь лед растаял бы через  $\tau_c = 48$  мин.

Стержни соединяют последовательно (рис.4). Какой будет температура  $t$  в месте соприкосновения медного и стального стержней? Рассмотрите два случая: а) кипящая вода соприкасается с торцом медного стержня; б) кипящая вода соприкасается с торцом стального стержня. Через какое время  $\tau$  растает весь лед при последовательном соединении стержней? Будет ли это время одинаково в случаях а) и б)?

С. Козел

4. Электрическая цепь составлена из семи последовательно соединенных резисторов с сопротивлениями  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 2$  кОм,  $R_3 = 3$  кОм,  $R_4 = 4$  кОм,  $R_5 = 5$  кОм,  $R_6 = 6$  кОм,  $R_7 = 7$  кОм и четырех переключек (рис.5). Входное напряжение  $U = 53,2$  В. Укажите резистор, через который протекает минимальный ток.

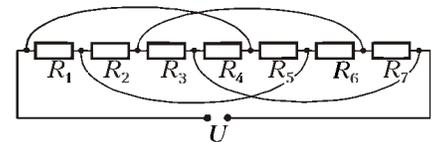


Рис. 5

Найдите значение силы тока через этот резистор. Через какой резистор протекает максимальный ток? Найдите его значение.

В. Слободянин

10 класс

1. Легковой автомобиль едет по горизонтальной дороге со скоростью  $v_0$ . Если водитель заблокирует задние колеса, тормозной путь машины составит  $L_1 = 28$  м. Если водитель заблокирует передние колеса, тормозной путь будет  $L_2 = 16$  м. Каким окажется тормозной путь машины, если заблокировать все четыре колеса? Известно, что центр масс автомобиля расположен на равных расстояниях от осей передних и задних колес.

В. Слободянин

2. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли обрывок рукописи, на котором был изображен замкнутый цикл для  $\nu = 1$  моль гелия в координатах  $p, V$  (рис.6). Цикл состоял из

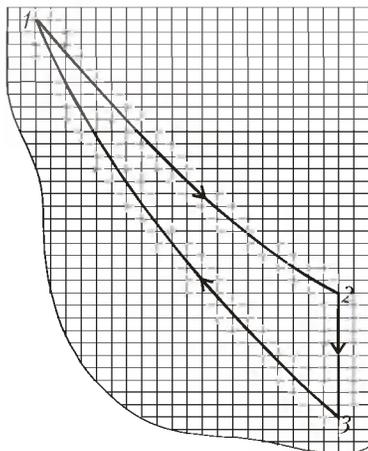


Рис. 6

изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1. КПД данного цикла  $\eta = 0,125$ . Масштаб по оси объема: 1 дел = 0,5 л, по оси давления: 1 дел =  $5 \cdot 10^3$  Па. Найдите объем газа в изохорическом процессе. На рисунке ось давления вертикальна, а ось объема горизонтальна.

А.Шеронов

3. Сферический конденсатор с радиусами обкладок  $R_1 = R$  и  $R_3 = 3R$  подсоединен к источнику с постоянным напряжением  $U$  (рис.7). Пространство между обкладками заполнено двумя слоями различных ве-

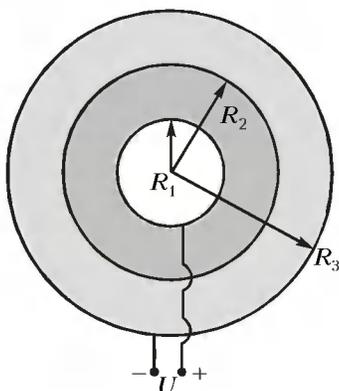


Рис. 7

ществ с удельными сопротивлениями  $\rho_1 = \rho$  и  $\rho_2 = 2\rho$  и диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ . Радиус сферической границы между слоями  $R_2 = 2R$ . Удельная проводимость слоев между обкладками конденсатора намного меньше удельной проводимости материала обкладок. Найдите заряд на границе между слоями различных веществ. Найдите также ток, текущий через конденсатор.

В.Чивилёв

4. В плоский конденсатор емкостью  $C_0$  вдвигается диэлектрическая пластина с диэлектрической прони-

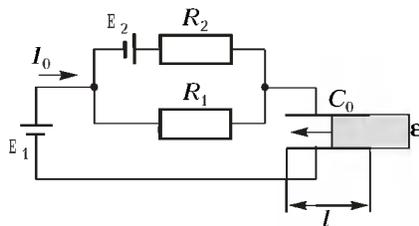


Рис. 8

цаемостью  $\epsilon$ . Конденсатор включен в электрическую цепь, представленную на рисунке 8. При этом оказалось, что ток, протекающий через батарею с ЭДС  $E_1$ , постоянен и равен  $I_0$ . Определите силу тока, протекающего через резистор с сопротивлением  $R_1$ . С какой скоростью движется диэлектрическая пластина? При расчетах считайте, что ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  заданы,  $R_1 = R_2 = R$ , длина пластин конденсатора равна  $l$ .

Ю.Чешев

5. На поверхности плоского зеркала лежит тонкая симметричная двояковыпуклая линза с фокусным расстоянием  $F_0 = 8$  см (рис.9,а). Где будет находиться изображение точечного источника, помещенного на расстоянии  $l_1 = F_0$  от линзы?

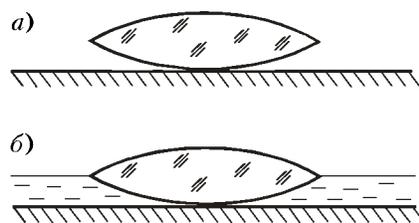


Рис. 9

На поверхность зеркала наливают воду так, что уровень воды совпадает с плоскостью симметрии линзы (рис.9,б). Если теперь точечный источник поместить на расстоянии  $l_2 = 12$  см от линзы, то его изображение совпадет с самим источником. На каком расстоянии от линзы нужно расположить точечный источник, чтобы его изображение совпало с ним самим, если долить столько воды, что она полностью скроет линзу?

Примечание. Оптические силы тонких линз, расположенных вплотную друг к другу, складываются.

И.Иоголевич

11 класс

1. На наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис.10), в начальный момент покоится ящик общей массой  $M$ , в котором находится груз массой  $m$ , совершающий колеба-

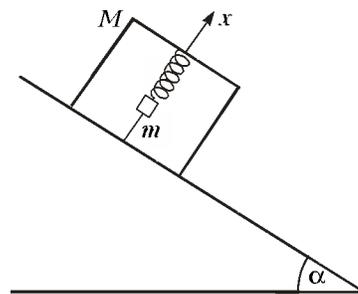


Рис. 10

ния по закону  $x = A \sin \frac{2\pi}{T} t$  с периодом  $T$  и амплитудой  $A$  вдоль прямой, перпендикулярной наклонной плоскости. Коэффициент трения ящика о плоскость  $\mu = \text{tg } \alpha$ . Найдите среднюю скорость движения ящика за время, много большее  $T$ , полагая, что ящик все это время скользит по наклонной плоскости. Найдите условие, при котором ящик не будет подпрыгивать.

А.Чудновский

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Схема, изображенная на рисунке 11, состоит из батареи с ЭДС  $E = 10$  В,

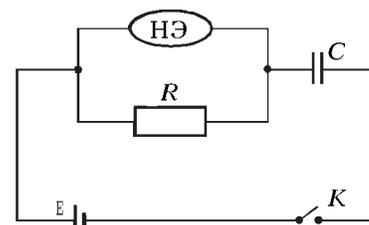


Рис. 11

резистора сопротивлением  $R = 100$  Ом, конденсатора емкостью  $C = 8$  мкФ и

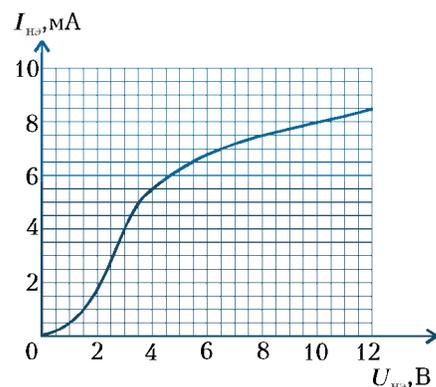


Рис. 12

нелинейного элемента НЭ, вольт-амперная характеристика которого изображена на рисунке 12. В некоторый момент времени ключ  $K$  замыкается. Предполагая, что сила тока, протекающего через НЭ, в любой момент времени много меньше силы тока, про-

текающего через батарею, определите количество теплоты, выделившееся на НЭ.

*В. Вавилов*

4. Схема, представленная на рисунке 13, состоит из конденсатора емкостью  $C$ , идеальных диодов  $D_1$  и

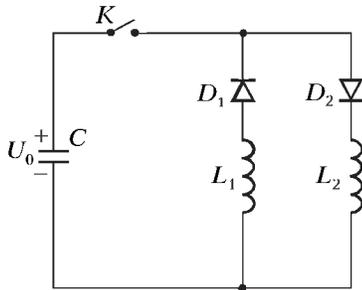


Рис. 13

$D_2$  и катушек с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2 = 4L_1$ . В начальный момент ключ  $K$  разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения  $U_0$ . Найдите зависимость силы тока через катушку индуктивностью  $L_2$  от времени после замыкания ключа и нарисуйте график этой зависимости.

*В. Можжев*

5. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет в виде палочки длиной  $l$  и его изображение длиной  $l'$ . От времени чернила выцвели, и остались видны только две точки: вершина палочки  $S$

и ее изображение  $S'$ . Из текста следовало, что главная оптическая ось проходила через середину палочки перпендикулярно ей. Определите положения центра линзы, главной оптической оси, фокусов линзы, предмета и его изображения и укажите, какая это линза (собирающая или рассеивающая), если  $l = 5$  см,  $l' = 2$  см,  $SS' = 15$  см.

*А. Чудновский*

### Экспериментальный тур

Комплект задач подготовлен комиссией по подготовке к олимпиаде физического факультета Саратовского государственного университета. Авторский коллектив: С. Венниг, В. Вешнев, В. Дербов, М. Куликов, Л. Мельников, Г. Окрокверцхов, А. Савин, В. Шевцов, И. Эльтерман.

9 класс

1. Определите коэффициент трения скольжения спичечной головки о шероховатую поверхность спичечного коробка.

*Оборудование:* коробка со спичками, динамометр, груз, лист бумаги, линейка, нить.

2. Деталь волоконно-оптического соединителя представляет собой стеклянный цилиндр (показатель преломления стекла  $n = 1,51$ ), в котором имеется два круглых цилиндрических канала. Торцы детали заклеены. Определите расстояние между каналами.

*Оборудование:* деталь соединителя, миллиметровая бумага, лупа.

10 класс

1. Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости (плотность жидкости  $\rho = 1082$  кг/м<sup>3</sup>).

*Оборудование:* капилляр, емкость с жидкостью, шприц, миллиметровая бумага.

2. Исследуйте зависимость положения равновесия тела от координат груза на его боковой поверхности.

*Оборудование:* тело, составной груз.

11 класс

1. Электрическая схема в черном ящике содержит 3 одинаковых резистора и два диода. Определите схему соединения элементов в черном ящике и значения сопротивлений резисторов.

*Оборудование:* черный ящик, тестер, батарейка, соединительные провода.

2. Оптический световод состоит из цилиндрической сердцевины и оболочки, сделанных из стекол с различными показателями преломления, лежащими в диапазоне 1,5–1,7. Показатель преломления одного из стекол равен 1,512. Определите показатель преломления другого стекла

*Оборудование:* световод, лазер, миллиметровая бумага.

*Публикацию подготовили С. Козел, В. Коровин, В. Орлов*

## Призеры олимпиады

### Дипломы I степени

по 9 классам получили

*Украинцев Олег* – Челябинск, ФМЛ 31,

*Попов Григорий* – Воронеж, гимназия им. академика Басова,

*Аполонская Пина* – Бийск, Бийский лицей,

*Семириков Вадим* – Березники, школа 3,

*Дмитриев Константин* – Липецк, школа 3,

*Сунцов Евгений* – Киров, ФМЛ;

по 10 классам –

*Михайлов Виктор* – Саратов, ФТЛ,

*Постоев Андрей* – п. Краснофлотский

Краснодарского кр., школа 11,

*Ражев Михаил* – Дубна, лицей «Дубна»,



*Идрисов Георгий* – Бийск, Бийский лицей,

*Самокотин Алексей* – Челябинск, ФМЛ 2,

*Квасов Игорь* – Дзержинск Нижего-

родской обл., школа 2;

по 11 классам –

*Калинин Вячеслав* – Клин, школа 1,

*Береснев Николай* – Киров, ФМЛ,

*Муравьев Вячеслав* – Смоленск, Педагогический лицей-интернат,

*Гатанов Тимур* – Санкт-Петербург, ФМГ 30,

*Нургалеев Данияр* – Москва, СУНЦ МГУ,

*Климай Петр* – Курган, Лингво-гуманитарная гимназия 47,

*Ахмеров Антон* – Новосибирск, СУНЦ НГУ,

*Шемятихин Дмитрий* – Ульяновск, школа 40.

# Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

## Первый тур

1. Вдоль правой стороны дороги припаркованы 100 машин. Среди них 30 красных, 20 желтых и 20 розовых мерседесов. Известно, что никакие два мерседеса разного цвета не стоят рядом. Докажите, что тогда какие-то три мерседеса, стоящие подряд, одного цвета. (7)

*К. Кохась*

2. В лавке можно обменять шило на мыло, или 3 мыла на 1 шило, или 1 мыло на 4 шила (но не наоборот). После нескольких обменов у Сережи оказалось столько же шила и мыла, сколько было вначале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на 16. (8)

*С. Иванов*

3. Федя и Наташа стартуют с одного и того же места и равномерно движутся по прямой линии в одном направлении. Федя спокойно идет, а Наташа бежит. Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и насчитывает до встречи с Наташей 100 (своих) шагов. Чьи шаги длиннее: идущего Феде или бегущей Наташи? (9)

*Ф. Назаров*

4. Можно ли бумажный прямоугольник размера  $103 \times 49$  разрезать «по клеточкам» на несколько прямоугольников, каждый из которых имеет размеры  $7 \times 9$ ,  $7 \times 14$  или  $9 \times 14$ ? (10)

*Ф. Бахарев, С. Иванов*

5. Вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{16}$  расставлены по кругу. При этом сумма любых трех стоящих подряд чисел не меньше 2, а сумма любых пяти стоящих подряд чисел не превосходит 4. Какое наибольшее значение может принимать разность  $a_1 - a_2$ ? (Не забудьте привести пример, когда эта разность достигает наибольшего значения.) (11)

*Е. Сопкина*

*В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

## Второй тур

6. На одной стороне улицы разбитых фонарей стояло 150 фонарей, причем среди любых трех фонарей, стоявших подряд, хотя бы один был разбит. После того как электрик Петров починил несколько фонарей, среди любых четырех фонарей, стоявших подряд, осталось не более одного разбитого. Докажите, что электрик починил не менее 25 фонарей. (6)

*К. Кохась*

7. На Васиной чаше двухчашечных весов лежат гири массами 1 г, 3 г, ..., ..., 2001 г, на Петиной чаше – 2 г, 4 г, ..., ..., 2000 г. Первым ходит Вася – он убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Петиной. Потом Петя убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Васиной. Затем опять ходит Вася, потом Петя, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет убрать все гири со своей чаши. Кто выигрывает при правильной игре? (6)

*Ю. Лифшиц*

8. Шестизначное число, делящееся на 9, умножили на 111111. Докажите, что десятичная запись произведения содержит хотя бы одну девятку. (7)

*А. Храбров*

9. Клетки черно-белой доски  $12 \times 12$  раскрашены в шахматном порядке. Разрешается взять любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: черные клетки – в зеленый цвет, зеленые – в белый, белые – в черный. Какое наименьшее число таких операций потребуется, чтобы получить «противоположную» бело-черную шахматную раскраску? (7)

*К. Кохась*

10. Натуральные числа  $u$  и  $v$  таковы, что для любого натурального  $k$  числа  $ku + 2$  и  $kv + 3$  имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение  $u/v$ ? (8)

*А. Голованов, Д. Карпов, А. Пастор*

11. Колоду карточек с числами от 1 до 78 дают зрителю. Тот ее перемешивает, отбирает 40 карточек, отдает их первому фокуснику, а остальные оставляет себе. Первый фокусник выбирает из полученных карточек две и возвращает их зрителю. Зритель добавляет к этим карточкам одну карточку из своих тридцати восьми и, перемешав, отдает эти три карточки второму фокуснику. Второй фокусник показывает, какая из карточек была добавлена зрителем. Объясните, как может быть показан такой фокус. (8)

*К. Кохась*

12. Все клетки доски  $10 \times 10$  покрашены в белый цвет. Федя и Юра по очереди (начинает Федя) перекрашивают по одной белой клетке в черный цвет. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется двух соседних по стороне белых клеток. Кто выигрывает при правильной игре? (9)

*А. Храбров*

13. В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$   $AB = BC$ ,  $CD = DE$  и  $\angle A = \angle C = \angle E < 90^\circ$ . Докажите, что этот пятиугольник – описанный. (9)

*Ф. Бахарев*

14. Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  – середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . На средних линиях  $C_1B_1$  и  $A_1B_1$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что прямая  $BE$  содержит биссектрису угла  $AEB_1$ , а прямая  $BF$  – биссектрису угла  $CFB_1$ . Докажите, что биссектрисы углов  $ABC$  и  $FBE$  совпадают. (9)

*Ф. Бахарев*

15. На биссектрисе  $AL$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $K$ , причем  $\angle BKL = \angle KBL = 30^\circ$ . Прямые  $AB$  и  $CK$  пересекаются в точке  $M$ , а прямые  $AC$  и  $BK$  – в точке  $N$ . Найдите угол  $AMN$ . (10)

*Д. Ширяев, С. Берлов*

16. В парламенте страны Альтернативии для любых двух депутатов найдется третий, знакомый ровно с одним из них. Каждый депутат состоит в одной из двух правящих партий. Ежедневно президент приказывает некото-

рой группе депутатов перейти в другую партию, при этом все депутаты, знакомые хотя бы с одним из депутатов группы, тоже меняют свою партийную принадлежность. Докажите, что президент может добиться того, чтобы все без исключения депутаты Альтернативы перешли в ту партию, которую поддерживает он сам. (Президент не является членом парламента.) (10)

С.Берлов

17. Для любых натуральных чисел  $n > m$  докажите неравенство

$$[m, n] + [m + 1, n + 1] > \frac{2mn}{\sqrt{n - m}},$$

где  $[x, y]$  – наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$ . (11)

А.Голованов

18. Найдите все такие функции  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , что для любых целых  $x$  и  $y$

выполняется соотношение  $f(x + y) + f(y) = f(x) + 2y$ . (11)

Ф.Петров

19. Из таблицы  $20 \times 20$  вырезали прямоугольники  $1 \times 20$ ,  $1 \times 19$ , ...,  $1 \times 1$ . Докажите, что наибольшее количество прямоугольников  $1 \times 2$ , которое заведомо можно вырезать из оставшейся части таблицы, равно 85. (11)

С.Берлов, А.Храбров

### Отборочный тур

20. На доске написано натуральное число. Два игрока ходят по очереди, и каждый своим ходом заменяет написанное на доске число  $n$  числом  $n - 1$

или  $\left[\frac{n+1}{2}\right]$  (квадратные скобки обозначают целую часть). Выигрывает тот, кто первым напишет на доске

число 1. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер, если в начале игры число на доске равно 1000000? (9–10)

О.Ванюшина

21. В шахматном клубе посетители могут играть в шахматы друг с другом или с компьютером. Вчера в клубе было  $n$  человек, каждый из них сыграл не более  $n$  партий, и любые двое, не игравшие друг с другом, сыграли в сумме не более  $n$  партий. Докажите, что всего было сыграно не более  $\frac{n(n+1)}{2}$  партий. (9–10)

А.Федотов

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. Из условия задачи следует, что стоимость всей покупки в центах должна делиться на 3. Но 2000 на три не делится, следовательно, дядюшка Скрудж должен получить сдачу.

2. В каждой из четырех отмеченных вершин куба (рис.1) должно сходиться по 3 разноцветных ребра, так что ребер каждого цвета должно быть не менее четырех. Но и не более четырех, поскольку у куба всего 12 ребер. Одна из возмож-

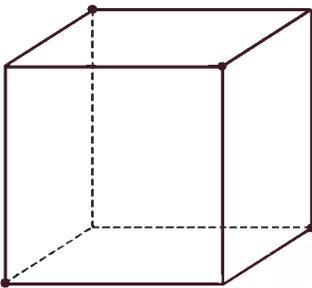


Рис. 1

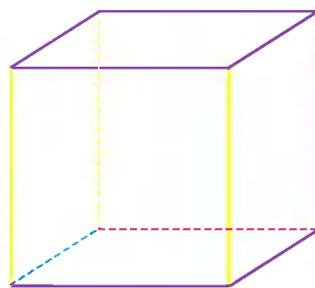


Рис. 2

ных раскрасок показана на рисунке 2 (параллельные ребра окрашены одним цветом).

3. Удовлетворяющие условию задачи девять последовательных чисел будем искать среди чисел вида  $\overline{ab(c-4)}$ ,  $\overline{ab(c-3)}$ ,  $\overline{ab(c-2)}$ ,  $\overline{ab(c-1)}$ ,  $\overline{abc}$ ,  $\overline{ab(c+1)}$ ,  $\overline{ab(c+2)}$ ,  $\overline{ab(c+3)}$ ,  $\overline{ab(c+4)}$ , где  $a, b, c$  – некоторые ненулевые цифры. Сумма произведений цифр этих чисел равна

$$ab((c-4) + (c-3) + (c-2) + (c-1) + c + (c+1) + (c+2) + (c+3) + (c+4)) = 9abc.$$

Приравняв ее к числу  $1125 = 9 \cdot 5^3$ , находим

$$a = b = c = 5.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют девять последовательных чисел: 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559.

4. На рисунке 3 показаны два равных правильных треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , а также прямые  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , обладающие требуемыми свойствами. Треугольник  $A_1B_1C_1$  симметричен треугольнику  $ABC$  относительно прямой  $\Pi_2$ . Прямая  $\Pi_2$  пересекает стороны треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$

таких, что  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ . Прямая  $\Pi_1$  проходит через вершину  $A$  перпендикулярно прямой  $\Pi_2$ .

5. Равенства в первой пирамиде представляют собой частный случай тождества

$$n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + 2n),$$

а равенства во второй пирамиде – частный случай тождества.

$$\begin{aligned} & ((1+2n)n)^2 + ((1+2n)n+1)^2 + \dots + ((1+2n)n+n)^2 = \\ & = ((1+2n)n+n+1)^2 + ((1+2n)n+n+2)^2 + \dots + ((1+2n)n+2n)^2, \end{aligned}$$

где  $n$  – натуральное.

Справедливость этих тождеств проверьте самостоятельно.

### Калейдоскоп «Кванта»

#### Вопросы и задачи

1. От гладкой поверхности воды свет фар отражается зеркально, т.е. вперед, а от шероховатой дороги – рассеянно,

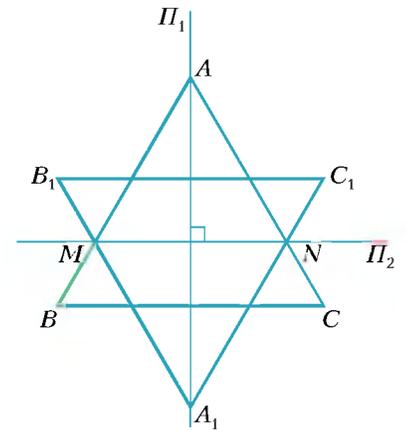


Рис. 3

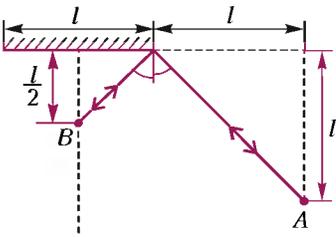


Рис. 4

- так что часть отраженного света попадает в глаза водителю.  
 2. Нет, нельзя. Отражение от экрана должно быть рассеянным – иначе зрители не увидят изображения.  
 3. На расстоянии  $l/2$  от зеркала (рис.4).  
 4. Если на зеркало падает сходящийся пучок лучей.

5. Можно. Например, свет, идущий от фонарика (рис.5), отразится зеркалом, попадет на предмет А, и его изображение

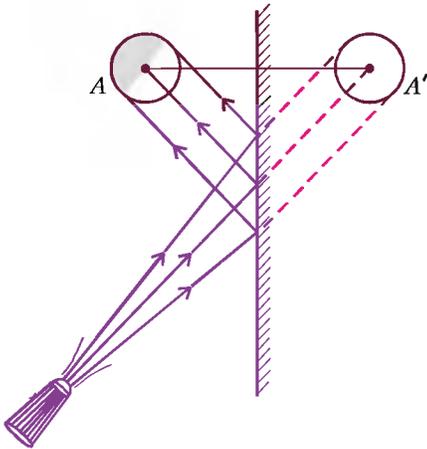


Рис. 5

- А' в зеркале станет также более освещенным.  
 6. Ошибся художник, сделавший рисунок а). Подводная часть палки должна казаться нам приподнятой из-за преломления на границе вода – воздух.  
 7. Лучи останутся параллельными.  
 8. Нет, так как показатель преломления у воды меньше, чем у стекла.  
 9. Нет, не может.

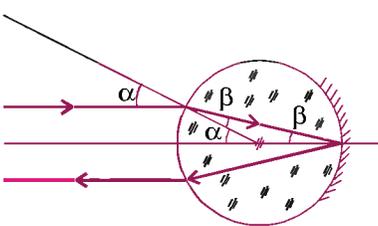


Рис. 6

10. Вследствие капиллярных эффектов вода поднимается по карандашу, и ее поверхность вблизи него искривляется. Лучи света преломляются на искривленной поверхности воды так, что на тени карандаша появляется светлый промежуток.  
 11. Из-за копоти поверхность монеты покрыта слоем воздуха, на границе которого с водой происходит полное отражение освещающего монету света.  
 12.  $n = 2$  (так как  $\alpha = 2\beta$ ; рис.6).  
 13. Изображение лампы получается при отражении лучей света от задней (посеребренной) и от передней грани стекла. Кроме того, многократное отражение от обеих граней лучей, идущих внутри стекла, создает ряд дополнительных изображений.  
 14. Изображение свечи приблизится к зеркалу.  
 15. При прохождении через толченное стекло свет пересекает множество границ раздела стекло – воздух, на каждой из которых происходит не только преломление, но и отражение. Из-за этого свет практически не проходит сквозь толченное стекло, и оно выглядит белым. В воде, показатель преломления которой близок к показателю преломления стекла, отражение на границах раздела, а также отклонение лучей при преломлении резко уменьшаются, поэтому в воде толченное стекло почти прозрачно.

**Микроопыт**

Закрытый глаз вновь не будет виден. Причина – в обратимости световых лучей: падающий и отраженный лучи меняются местами.

**Корпускулярные и волновые свойства света**

- $n = \frac{e\lambda W}{chI_n} \approx 100.$
- $\Delta\lambda = \frac{h}{2m_p c} \approx 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ м}$  (здесь  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$  – масса протона).
- $m = \frac{2H\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{\lambda} \approx 360; \Delta x = \frac{\lambda L \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{H \sin \varphi \cos^2 \varphi} \approx 2,8 \text{ см};$   
 $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \approx 1,6 \text{ нм}.$

**Иррациональные уравнения**

- а)  $\emptyset$ ; б)  $-2; 1$ ; в)  $4 + 2\sqrt{7}$ ; г)  $\emptyset$ ; д)  $3$ ; е)  $-1/2; 3/2$ ; ж)  $-1$ ; з)  $1/2$ .
- а)  $99/49; 3$ ; б)  $(5 \pm 2\sqrt{2})/2$ ; в)  $1 \pm \sqrt{3}$ . *Указание.* Сделайте замену  $u = \sqrt{2x^2 - 4x + 12}$ ; г)  $12$ ; д)  $4$ ; е)  $(-1 \pm \sqrt{17})/2$ ; ж)  $-1/\sqrt{2}; (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$ . *Указание.* Возведите в квадрат, а затем выполните замену  $t = 2x\sqrt{1-x^2}$ ; з)  $(1 + \sqrt{37})/2$ .
- а)  $11 - a + 4\sqrt{7-2a}$  при  $a < 1,5$ ;  $11 - a \pm 4\sqrt{7-2a}$  при  $1,5 \leq a \leq 3,5$ ;  $\emptyset$  при  $a > 3,5$ ; б)  $\emptyset$  при  $a < (1 + \sqrt{17})/4$ ;  $(17 + \sqrt{17})/4$  при  $a = (1 + \sqrt{17})/4$ ;  
 $3a^2 - a - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - a - 2}$  при  $(1 + \sqrt{17})/4 < a \leq 2$ ;  
 $3a^2 - a - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - a - 2}$  при  $a > 2$ ; в)  $12 - 2a + 4\sqrt{8-3a}$  при  $a < 4/3$ ;  $12 - 2a \pm 4\sqrt{8-3a}$  при  $4/3 \leq a < 8/3$ ;  $20/3$  при  $a = 8/3$ ;  $\emptyset$  при  $a > 8/3$ ; г)  $\emptyset$  при  $a < -3/8$  и  $0 < a < 3/8$ ;  $12a^2 - 2a + 4a\sqrt{8a^2 - 3a}$  при  $-3/8 \leq a \leq 0$  и  $a > 4/3$ ;  
 $12a^2 - 2a \pm 4a\sqrt{8a^2 - 3a}$  при  $3/8 < a \leq 4/3$ ;  $15/16$  при  $a = 3/8$ .
- а)  $-3/4$ ; б)  $3/4$ ;  $(7 - \sqrt{13})/6$ ; в)  $(5 - 3\sqrt{5})/15$ ; г)  $5$ ; д)  $1$ ; е)  $5$ .
- а)  $3$ ; б)  $1$ ; в)  $1$ ; г)  $(3 + \sqrt{13})/2$ . *Указание.* При  $x \geq 0$  уравнение равносильно такому:  

$$x = \sqrt{3\sqrt{3x+1}+1},$$
 а при  $x < 0$  корней нет.
- а)  $2$ ; б)  $2$ . 7. а)  $-1$ ; б)  $2$ .

**XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Заключительный этап**

**9 класс**

- Эти суммы равны. *Указание.* Разбейте числа от  $n^2$  до  $(n+1)^2 - 1$  на две группы  $A_n = \{n^2, n^2 + 1, \dots, n^2 + n\}$  и  $B_n = \{n^2 + n + 1, n^2 + n + 2, \dots, n^2 + 2n\}$ . Для чисел группы  $A_n$  ближайшим квадратом является  $n^2$ , для  $B_n$  ближайшим является  $(n+1)^2$  – квадрат другой четности. Докажите, что  $S(B_n) = S(A_n)$ .
- Из условия следует, что  $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_2 - x_1 > 2$ , и  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + Ax + B)$ , так как  $P(x_1) = Q(x_1) = 0$ ,  $P(x_2) = Q(x_2) = 0$ . Предположим, что

$P(x) - Q(x) \geq 0$ , т.е.  $(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + Ax + B - 1) \geq 0$  при всех  $x$ . Это возможно только тогда, когда  $x^2 + Ax + (B - 1) = (x - x_1)(x - x_2)$ , т.е. при  $A = -(x_1 + x_2)$ ,  $B - 1 = x_1x_2$ . Поэтому дискриминант грехчлена  $x^2 + Ax + B$ , равный  $D = (x_1 - x_2)^2 - 4$  положителен. Но тогда  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$  (возможны совпадения корней  $x_3$  и  $x_4$  с  $x_1$  или  $x_2$ , но при этом  $x_3 \neq x_4$ ), т.е.  $P(x)$  не может быть отрицательным только в интервале  $I = (x_1; x_2)$ . Противоречие.

**3.** Пусть  $M$  – середина стороны  $CD$ , а  $L$  – середина стороны  $AD$ . Достроим параллелограмм  $ABCD$  до треугольника  $BA_1C_1$  так, чтобы отрезок  $AC$  был средней линией треугольника  $BA_1C_1$  (рис.7). Для этого через точку  $D$  проведем прямую,

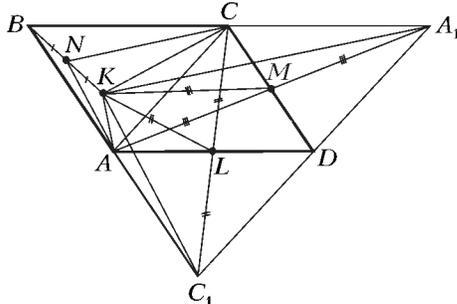


Рис. 7

параллельную  $AC$ , и обозначим через  $A_1$  и  $C_1$  точки пересечения этой прямой с продолжениями сторон  $BC$  и  $BA$  соответственно. Четырехугольники  $ACA_1D$  и  $CAC_1D$  – параллелограммы, а точки  $A, M$  и  $A_1$  лежат на одной прямой. Следовательно, в треугольнике  $AKA_1$  угол  $K$  – прямой, поскольку точка  $M$  равноудалена от точек  $A, A_1$  и  $K$ . Аналогично доказывается, что  $\angle CKC_1 = 90^\circ$ . Таким образом,

$$\angle CKA_1 = 90^\circ - \angle A_1KC_1 = \angle C_1KA.$$

Отрезки  $CN$  и  $KA_1$  параллельны, ибо  $CN$  – средняя линия в треугольнике  $KBA_1$ . Аналогично параллельны отрезки  $AN$  и  $KC_1$ . Следовательно,

$$\angle NCK = \angle CKA_1 = \angle C_1KA = \angle NAK.$$

**4.** Уберем вершину  $A_{2000}$  данного многоугольника  $A_1A_2 \dots A_{2000}$ . Назовем *средними* диагоналями многоугольника  $A_1A_2 \dots A_{1999}$  отрезки, соединяющие вершины, номера которых отличаются на 999 или 1000. Рассмотрим все средние диагонали, их ровно 1999 штук, причем любые две из них пересекаются, а из каждой вершины выходят ровно две средние диагонали. Поскольку  $1999 > 2 \cdot 999$ , то найдутся три одноцветные средние диагонали, они попарно пересекаются в трех разных точках. Эти точки пересечения и являются вершинами искомого треугольника.

**5.** 500 или 501.

Рассмотрим любые четыре подряд идущие монеты. Докажем, что среди них ровно одна трехкопеечная. Предположим противное. Если среди этих монет не оказалось ни одной трехкопеечной, то однокопеечные и двухкопеечные монеты чередуются, что невозможно. Двух трехкопеечных монет тоже не может быть, поскольку между ними должно быть хотя бы три монеты. Таким образом, среди первых 2000 монет ровно 500 трехкопеечных. Следовательно, всего трехкопеечных монет может быть 501 или 500. Оба ответа возможны, например,

$$3121312131213 \dots 31213 \text{ и } 2131213121312 \dots 21312.$$

**7.** Пусть  $P$  и  $Q$  – середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно,

$P_1, K_1, Q_1, M_1$  – проекции точек  $P, K, Q, M$  на сторону  $AC$  (рис.8). Тогда

$P_1Q_1 = \frac{1}{2}AC$  и, по условию,

$K_1M_1 = \frac{1}{2}AC$ , поэтому  $P_1Q_1 = K_1M_1$ ,

следовательно, если точка  $K$  ближе к вершине  $B$ , чем точка  $P$ , то точка  $Q$  ближе к  $B$ , чем точка  $M$ . Из условия следует, что  $OP \perp AB, OQ \perp BC \Rightarrow \angle POQ = \pi - \angle B$ . Поэтому утверждение задачи равносильно равенству  $\angle KOM = \angle POQ$ , т.е., с учетом установленного расположения точек, подобию прямоугольных треугольников  $OPK$  и  $OQM$ .

Пусть  $\angle BAC = \alpha, \angle BCA = \gamma$ . Тогда  $PK = P_1K_1 : \cos \alpha, QM = Q_1M_1 : \cos \gamma$ . Но  $P_1Q_1 = K_1M_1 \Rightarrow P_1K_1 = Q_1M_1$ , и  $PK : QM = \cos \gamma : \cos \alpha$ .

С другой стороны,  $\angle AOB = 2\gamma \Rightarrow \angle BOP = \gamma \Rightarrow OP = R \cos \gamma$ , где  $R$  – радиус описанной окружности. Аналогично,  $OQ = R \cos \alpha \Rightarrow OP : OQ = \cos \gamma : \cos \alpha = PK : QM$  и, значит,  $\triangle OPK \sim \triangle OQM$ .

**8.**  $n = p^m$ , где  $p$  – простое число,  $m \in \mathbb{N}$ .

Предположим, что  $n$  не является степенью простого числа.

Пусть  $p$  – наименьший простой делитель числа  $n$ . Представим  $n$  в виде  $p^m \cdot k$ , где  $k \nmid p$ . По условию число  $l = p + k - 1$  является делителем  $n$ . Покажем, что  $l$  взаимно просто с  $k$ .

Предположим противное. Если  $(l, k) > 1$ , то

$(p - 1, k) = (l - k, k) = (l, k) > 1$ . Таким образом, число  $k$  имеет какой-то делитель  $d, 2 \leq d \leq p - 1$ . Противоречие с выбором числа  $p$ . Следовательно,  $p + k - 1 = p^\alpha$ . Ясно, что  $\alpha \geq 2$ , ибо  $k > 1$ . Таким образом, числа  $p^2$  и  $k$  – взаимно простые делители числа  $n$ , т.е.  $p^2 + k - 1$  – делитель числа  $n$ . При этом  $p^2 + k - 1$  взаимно просто с  $k$ , поскольку в противном случае  $k$  имеет общий делитель с  $p^2 - 1 = 2(p - 1) \cdot \frac{p + 1}{2}$ , что снова

противоречит выбору числа  $p$ . Следовательно,  $p^2 + k - 1 = p^\beta$ , где  $\beta \geq 3$ . Но тогда

$$p^\beta = p^2 + k - 1 = p^2 + (p + k - 1) - p = p(p + p^{\alpha-1} - 1)l p^2.$$

Противоречие, следовательно,  $k = 1$ . Нетрудно убедиться, что полученные числа удовлетворяют условию.

### 10 класс

**3.** Обозначим внешнюю окружность через  $\Omega$ , внутреннюю –  $\omega$ , описанную окружность треугольника  $BKM$  –  $\omega_1$ , их радиусы –  $R, r$  и  $r_1$  соответственно. Пусть отрезок  $BN$  пересекает  $\omega$  в точке  $P$  (рис.9). Рассмотрим гомотегию  $H$  с центром в точке  $N$ , переводящую внутреннюю окружность во внешнюю. Тогда  $H(P) = B$ ,

$H(AB) = l$ , где  $l$  – касательная к  $\Omega$ , параллельная  $AB$ , г.е. проходящая через точку  $M$ . Следовательно,

$H(K) = M$ , т.е. точки  $N, K, M$  лежат на одной прямой.

Тогда, по теореме синусов,

$$BK : BN = (2r_1 \sin \alpha) : (2R \sin \alpha) = r_1 : R, \text{ где } \alpha = \angle BMN. \text{ Кроме}$$

того,  $NP : BN = r : R$ . Далее,  $BK^2 = BP \cdot BN$ , поэтому

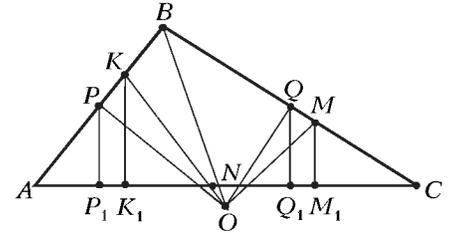


Рис. 8

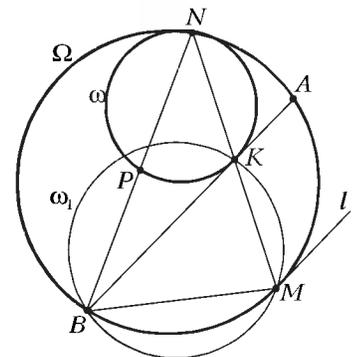


Рис. 9

$\left(\frac{r_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{BK}{BN}\right)^2 = \frac{BP}{BN} = 1 - \frac{NP}{BN} = 1 - \frac{r}{R}$ . Отсюда следует, что отношение  $\frac{r_1}{R}$  постоянно.

4. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам. В этом графе между любыми двумя вершинами есть единственный путь, следовательно, в нем нет циклов (такой граф называется *деревом*). По условию, в этом графе есть 100 вершин, из которых выходит ровно одно ребро (такие вершины называются *висячими*) – пусть эти вершины  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ . Для каждой пары висячих вершин  $A_i$  и  $A_j$  существует единственный путь между ними; назовем количество ребер на этом пути *расстоянием* между этими вершинами и будем обозначать через  $d(A_i, A_j)$ . Из конечности числа способов разбить эти 100 вершин на 50 пар следует, что при одном из способов достигается максимум суммы расстояний между вершинами в парах. Соединим пары вершин при этом разбиении 50 *новыми* ребрами (остальные ребра будем называть *старыми*). Мы докажем, что после этого даже при удалении любого ребра сохраняется *связность* графа (т.е., возможность из любой вершины попасть в любую другую).

Предположим противное: пусть при удалении ребра между вершинами  $B$  и  $C$  граф распался на две части, которые не связаны между собой. Нетрудно заметить, что удаленное ребро было старым, в одной из полученных частей находится вершина  $B$ , а в другой – вершина  $C$ . Очевидно, в каждой части должна быть вершина, из которой выходит ровно одно старое ребро, и каждое новое ребро соединяет две вершины из одной части. Но тогда в одной из частей должно быть новое ребро, соединяющее вершины  $A_i$  и  $A_j$ , а в другой – соединяющее вершины  $A_k$  и  $A_m$ . Однако в этом случае нетрудно проверить, что

$$d(A_i, A_j) + d(A_k, A_m) < d(A_i, A_k) + d(A_j, A_m),$$

что противоречит максимальности суммы расстояний в выбранных парах. Следовательно, при удалении ребра  $BC$  возможность попасть из любой вершины в любую другую должна сохраниться.

5. По условию,  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ , следовательно,  $P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$ , где  $Q(x) - x_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Пусть  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – дискриминант трехчлена  $Q(x) - x_i$ . По условию,  $D_i < 0$ , т.е.  $2001 - x_i > \frac{1}{4}$ . Перемножив полученные неравенства, имеем

$$P(2001) = (2001 - x_1)(2001 - x_2)(2001 - x_3) > \frac{1}{64}.$$

7. Пусть окружность, проходящая через  $H, A_1, B_1$ , пересекает второй раз прямую  $CH$  в точке  $C'_1$ . Достаточно доказать, что  $C'_1$  совпадает с  $C_1$ .

Рассмотрим точку  $F$ , диаметрально противоположную точке  $H$  (рис. 10). Углы  $HA_1F, HB_1F$  и  $HC'_1F$  – прямые, так как

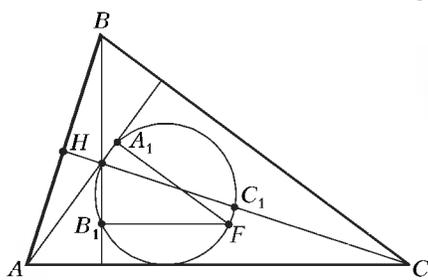


Рис. 10

опираются на диаметр. Поэтому  $A_1F \parallel BC, B_1F \parallel AC, C'_1F \parallel AB$ . Отсюда следует равенство площадей  $S_{BFC} = S_{BA_1C}$  (в треугольниках  $BFC$  и  $BA_1C$  основание общее, а высоты рав-

ны), аналогично,  $S_{CFA} = S_{CB_1A}$  и  $S_{AFB} = S_{AC'_1B}$ .

Заметим, что точка  $F$  лежит внутри треугольника  $ABC$ : поскольку  $A_1$  и  $B_1$  лежат на высотах, а не на их продолжениях, точка  $F$  лежит внутри угла  $ACB$ ; если бы при этом  $F$  лежала вне треугольника  $ABC$ , то сумма площадей

$S_{AFC} + S_{BFC} = S_{AB_1C} + S_{BA_1C}$  была бы больше площади  $S$  треугольника  $ABC$  – противоречие с условием; таким образом,  $C'_1$  лежит на высоте, а не на ее продолжении. Ввиду равенств  $S = S_{AFB} + S_{BFC} + S_{CFA} = S_{AC_1B} + S_{BA_1C} + S_{CB_1A}$  получаем, что  $S_{AC'_1B} = S_{AC_1B}$ , откуда следует совпадение точек  $C_1$  и  $C'_1$ .

8.  $n = p^3$ , где  $p$  – простое, или  $n = 12$ .

Легко видеть, что указанные в ответе числа удовлетворяют условию задачи. Покажем, что других чисел, удовлетворяющих условию, не существует.

Случай нечетного  $n$  рассмотрен в решении задачи 8 для 9 класса. Пусть  $n$  четно и не является степенью двойки: представим его в виде  $n = 2^m \cdot k$ , где  $m \geq 1$ , а  $k > 1$  – нечетное число. Заметим, что  $k + 2 - 1 = k + 1$  – делитель  $n$ . Поскольку  $(k + 1, k) = 1$ , то  $k + 1 = 2^\alpha$ ,  $\alpha > 1$ . Поэтому  $2^2 + k - 1 = k + 3$  – тоже делитель  $n$ . Заметим, что  $k + 3 = (k + 1) + 2 = 2^\alpha + 2$  не делится на  $2^2$ . Кроме того,  $(k + 3, k) = (3, k) \leq 3$ . Из этого заключаем, что  $k + 3 \leq 2 \cdot 3 = 6$ , и  $k \leq 3$ . Значит,  $n = 2^m \cdot 3$ . Но  $m = 1$  не подходит;  $m \geq 3$  также не подходит, так как в этом случае мы получили бы, что  $2^3 + 3 - 1 = 10$  также делитель  $n$ .

### 11 класс

1. 97 средних чисел.

Заметим, что если число  $k = m$  является средним, то число  $k = 100 - m$  также является средним. Поэтому если число  $k = 1$  не является средним, то число  $k = 99$  также не является средним и количество средних чисел не больше 97 ( $k \neq 100$ ). Если же число  $k = 1$  является средним, то вес одной из гирек равен  $S$  и, следовательно, только  $k = 99$  также является средним числом. Значит, количество средних чисел не превосходит 97.

Приведем пример набора из 100 гирек с весами  $a_1, \dots, a_{100}$ , для которого все числа от 2 до 98 (всего 97 чисел) – средние. Пусть  $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n = 1, 2, \dots, 97$  – последовательные числа Фибоначчи и  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{98}$ . Выберем  $a_{100} = S - a_{99}$ . Тогда суммарный вес всех гирек равен  $2S$  и в то же время

$$\begin{aligned} a_{100} + a_{99} &= a_{100} + a_{98} + a_{97} = a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{95} = \\ &= a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{93} = \\ &= a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{92} + a_{90} + \dots + a_6 + a_4 + a_3 + a_2 = S. \end{aligned}$$

Следовательно, средними являются числа 2, 3, 4, ..., 51. Но тогда средними будут и числа  $100 - 2 = 98, 100 - 3 = 97, \dots, 100 - 48 = 52$ , т.е. все числа от 2 до 98 – средние.

3. Для каждой из прямых, пересекающих все многоугольники набора  $P_1$ , проведем параллельную ей прямую через центр  $O$  некоторой окружности  $S$ . Обозначим через  $S_1$  множество точек пересечения этих прямых с  $S$ . Определим аналогично для набора  $P_2$  множество  $S_2 \subset S$ .

Покажем, что  $S_1 \cup S_2 = S$ . Спроектируем многоугольники наборов  $P_1$  и  $P_2$  на произвольную прямую  $l$ . Из условия следует, что при этом получатся два набора отрезков  $P'_1$  и  $P'_2$  таких, что любые два отрезка из разных наборов имеют общую точку.

Возьмем отрезок  $l$ , левый конец  $A$  которого является среди полученных отрезков самым правым. Пусть, например,  $l$  принадлежит  $P'_1$ , тогда все отрезки  $P'_2$  содержат точку  $A$ . Следо-

вательно, прямая  $m$ , проходящая через точку  $A$  перпендикулярно  $l$ , пересекает все многоугольники набора  $P_2$ . Значит, равенство  $S_1 \cup S_2 = S$  доказано.

Очевидно, все отрезки в  $P'_1$  имеют общую точку и в  $P'_2$  имеют общую точку тогда и только тогда, когда точки окружности  $S$ , имеющие направление  $m$ , принадлежат как  $S_1$ , так и  $S_2$ .

Но если все отрезки из  $P'_1$  имеют общую точку и все отрезки из  $P'_2$  имеют общую точку, то любые два отрезка из  $P'_1 \cup P'_2$  имеют общую точку. Тогда все отрезки из  $P'_1 \cup P'_2$  имеют общую точку.

Следовательно, прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно  $l$ , пересекает все многоугольники наборов  $P_1$  и  $P_2$ . Таким образом, утверждение задачи доказано, если  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ .

Покажем, что  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ . В самом деле, легко видеть, что множества  $S_1$  и  $S_2$  состоят из конечного числа замкнутых дуг окружности (например, если число элементов в  $P_1$  не больше  $n$ , то дуг не больше  $2C_n^2$ , так как конец каждой дуги соответствует непересекающимся многоугольникам). Так как в каждом множестве есть пара непересекающихся многоугольников, то, отделяя эти многоугольники прямой, мы видим, что  $S_1 \neq S$  и  $S_2 \neq S$ .

Если  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , то  $S_1 \cup S_2$  состоит из попарно непересекающихся замкнутых дуг. Возьмем конец одной дуги, тогда между ним и ближайшим концом дуги по часовой стрелке нет точек  $S_1 \cup S_2$ , что противоречит тому, что  $S_1 \cup S_2 = S$ .

#### 4. При $n$ участниках.

Докажем, что  $n$  участников могло быть. Пример очевиден – пусть каждый ответит только на один вопрос, причем разные участники – на разные вопросы.

Теперь докажем от противного, что не могло быть  $n + 1$  участников или более. Представим себе, что мы клонировали каждого участника, т.е. у нас есть неограниченное количество участников каждого из  $n + 1$  типов. Докажем, что если мы сможем составить из них две команды, разные по составу (хотя бы для одного типа число участников этого типа в первой команде не равно числу участников этого типа во второй команде), но имеющих одинаковые результаты (т.е. на каждый вопрос в первой команде ответило столько же человек, сколько во второй), то мы пришли к противоречию.

Во-первых, можно считать, что участники каждого типа присутствуют не более чем в одной команде: если в обеих командах есть по участнику одного типа – удалим их, составы команд останутся разными, а результаты будут одинаковыми.

Пусть, без ограничения общности, в первой команде участников не меньше, чем во второй. Тогда нельзя назначить баллы за вопросы так, чтобы места всех участников первой команды были выше, чем места участников второй команды, ибо сумма баллов участников первой команды всегда равна сумме баллов участников второй команды.

Осталось доказать, что такие две команды найдутся. Для этого запишем систему линейных уравнений,  $i$ -е уравнение которой гласит, что разность числа участников первой и второй команд, ответивших на  $i$ -й вопрос, есть ноль;  $j$ -й переменной здесь будет число участников  $j$ -го типа в команде (в первой, если переменная положительна, во второй – если отрицательна). Это система из  $n$  однородных уравнений с  $n + 1$  переменной. Как известно, она имеет ненулевое решение, причем, поскольку все коэффициенты рациональны (а они нули или единицы), существует рациональное ненулевое решение. Так как уравнения однородны, решение можно домножить на константу. Домножим так, чтобы значения всех переменных стали целыми. Требуемые команды найдены.

5. Пусть графики трехчленов пересекаются в точке  $P(x_0, y_0)$ .

Тогда

$$f(x) = y_0 + (x - x')(x - x_0);$$

$$g(x) = y_0 + (x - x'')(x - x_0),$$

поэтому

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) =$$

$$= (\alpha + \beta)y_0 + (x - x_0)((\alpha + \beta)x - (\alpha x' + \beta x'')) =$$

$$= (\alpha + \beta)y_0 + (\alpha + \beta)(x - x_0)^2 \geq (\alpha + \beta)y_0 > 0,$$

если выбрать  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы

$$(\alpha + \beta)x_0 = \alpha x' + \beta x'',$$

т.е.  $\beta = \alpha \frac{x_0 - x'}{x'' - x_0}$ . Это можно сделать, так как  $x' < x_0 < x''$ .

6. Пусть  $d$  – наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$ , т.е.  $a = da_1$ ,  $b = db_1$ , где  $a_1$  и  $b_1$  взаимно просты. Тогда  $da_1b_1(a_1 + b_1)$  делится на  $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = m$ . Число  $a_1 + b_1$  взаимно просто с числами  $a_1$  и  $b_1$  (в противном случае  $a_1$  и  $b_1$  имеют общий делитель), поэтому из равенств  $m = a_1(a_1 + b_1) + b_1^2 = b_1(a_1 + b_1) + a_1^2$  следует, что  $m$  взаимно просто с числами  $a_1$ ,  $b_1$  и  $a_1 + b_1$ , поэтому  $d$  делится на  $m$ . Но тогда  $d \geq m > a_1b_1$ , следовательно,  $d^3 > ab$ . Поэтому  $|a - b| \geq d > \sqrt[3]{ab}$ , что и требовалось доказать.

7. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам. В задаче требуется покрасить вершины этого графа в  $2001 - k$  цветов так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (такая раскраска называется *правильной*).

Рассмотрим вершину  $A$  наибольшей степени, пусть из этой вершины выходит  $s$  ребер. Обозначим через  $V$  множество из  $s$  вершин, соединенных с  $A$ , пусть  $W$  – множество из  $2000 - s$  оставшихся вершин. Рассмотрим два случая.

1) В множестве  $W$  есть две соединенные ребром вершины  $B$  и  $C$ . Тогда рассмотрим множество  $U$ , состоящее из вершины  $A$  и всех вершин множества  $W$ , кроме  $C$ . В этом множестве  $2000 - s$  вершин; любая не входящая в  $U$  вершина соединена ребром с одной из вершин множества  $U$  (либо с вершиной  $A$ , либо с  $B$ ). Следовательно,  $2000 - s \geq k$ .

Остается заметить, что из каждой вершины выходит не более  $s$  ребер, следовательно, эти вершины можно по очереди покрасить в  $s + 1$  цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (вершину нельзя красить в цвета ее соседей, которых не более чем  $s$ , а в нашем распоряжении  $s + 1$  цвет). Неравенство  $s + 1 = (2000 - s) \leq 2001 - k$  завершает доказательство в этом случае.

2) Никакие две вершины множества  $W$  не соединены ребром. Покрасим все эти вершины в цвет 1, в этот же цвет можно покрасить вершину  $A$  (она не соединена ребром ни с одной вершиной из  $W$ ). Заметим, что в этом случае вершины из множества  $W$  должны быть соединены с вершинами из множества  $V$  (так как из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро). Это означает, что среди вершин множества  $V$  есть две, не соединенные ребром (иначе в этом множестве есть вершина, из которой выходит более  $s$  ребер к  $s - 1$  остальным вершинам множества  $V$ , к вершине  $A$  и к вершинам множества  $W$ ). Так как среди  $s$  вершин множества  $V$  есть две, не соединенные ребром, вершины этого множества можно покрасить в  $s - 1$  цвет. Таким образом, все вершины оказались раскрашены в  $s$  цветов и никакие две вершины не соединены ребром. Так как все  $s$  вершин из множества  $V$  соединены ребром с вершиной  $A$ , то  $2001 - s \geq k$ , следовательно,  $s = 2001 - (2001 - s) \leq 2001 - k$ , что и требовалось доказать.

8. Пусть  $\omega$  – сфера из условия задачи,  $\omega_1$  – сфера, описан-

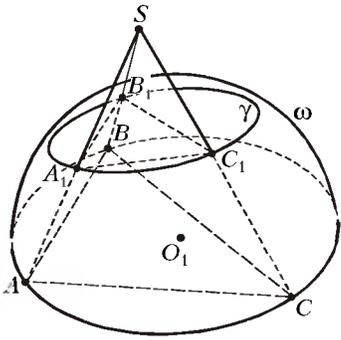


Рис. 11

ная около тетраэдра  $SA_1B_1C_1$ . Эти сферы пересекаются по окружности  $\gamma$ , описанной около треугольника  $A_1B_1C_1$  (рис.11). Выберем на  $\gamma$  произвольно точку  $K_1$ , пусть  $K$  – точка пересечения луча  $SK_1$  со сферой  $\omega$ . Рассмотрим сечение сфер  $\omega$  и  $\omega_1$  плоскостью  $\alpha = SAK$ . Пусть  $l$  – касательная к сечению сферы  $\omega_1$  плоскостью  $\alpha$ , проведенная в точке  $S$  (рис.12). Тогда  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 2 = \pi - \angle A_1K_1K = \angle 3$ , следовательно  $\angle 1 = \angle 3$  и, значит,  $AK \parallel l$ . Поэтому если  $\beta$  – плоскость, касающаяся  $\omega_1$  в точке  $S$ , то  $AK \parallel \beta$ . Поэтому лучи, проведенные из точки  $S$  и пересекающие окружность  $\gamma$ , вторично пересекают сферу  $\omega$  в точках, лежащих в одной плоскости  $\tau$ . Точки  $A, B$  и  $C$  лежат в этой плоскости, следовательно,  $\tau$  проходит через точку  $O_1$  – центр сферы  $\omega$ .

Теперь рассмотрим множество плоскостей, касающихся  $\omega$  в точках на окружности  $\gamma$ . Они касаются некоторого конуса с вершиной в точке  $O$  (и образующими  $OA_1, OB_1, OC_1$ ). Проведем плоскость через точки  $O, O_1$  и  $S$ . В сечении получатся две пересекающиеся окружности (рис.13), при этом

$$\angle SP_1P = \angle SQ_1Q = 90^\circ,$$

так как  $O_1 \in PQ$ . Но  $OP_1$  и  $OQ_1$  – касательные к окружностям

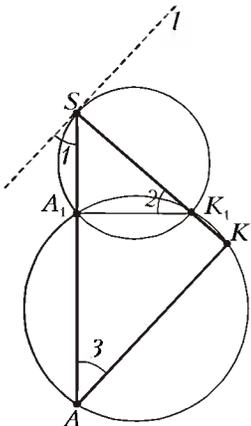


Рис. 12

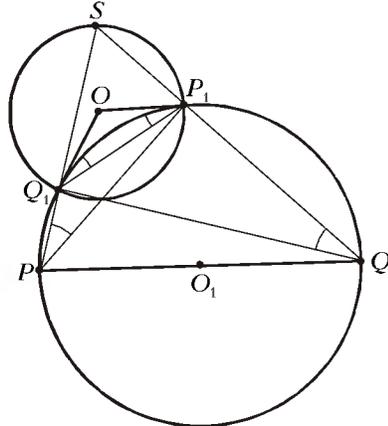


Рис. 13

ти с центром  $O_1$ , поэтому

$$\angle SPP_1 = \angle SQQ_1 = \angle OQ_1P_1 = \angle OP_1Q_1,$$

т.е.  $\triangle O_1QP_1$  – равнобедренный и  $\angle Q_1O_1P_1 = 180^\circ - 2\angle OQ_1P_1 = 2(90^\circ - \angle SPP_1) = 2\angle Q_1SP_1$ . Отсюда и из равенства  $OP_1 = OQ_1$  следует, что  $O$  – центр окружности, описанной около  $\triangle SP_1Q_1$ . Но тогда  $OS = OP_1 = OA_1 = OB_1 = OC_1$ , т.е.  $O$  – центр сферы  $\omega_1$ .

**XXXV Всероссийская олимпиада школьников по физике**

*Теоретический тур*

9 класс

1.  $v = u\sqrt{\cos^2 \alpha + (1/4)\sin^2 \alpha} \approx 0,67$  м/с.    2.  $h_{\min} \approx 20$  см.

3.  $t_a = \frac{t_2\tau_c + t_1\tau_m}{\tau_c + \tau_m} \approx 76^\circ\text{C}$  (здесь  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ),

ная около тетраэдра  $SA_1B_1C_1$ . Эти сферы пересекаются по окружности  $\gamma$ , описанной около треугольника  $A_1B_1C_1$  (рис.11). Выберем на  $\gamma$  произвольно точку  $K_1$ , пусть  $K$  – точка пересечения луча  $SK_1$  со сферой  $\omega$ . Рассмотрим сечение сфер  $\omega$  и  $\omega_1$  плоскостью  $\alpha = SAK$ .

Пусть  $l$  – касательная к сечению сферы  $\omega_1$  плоскостью  $\alpha$ , проведенная в точке  $S$  (рис.12). Тогда  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 2 = \pi - \angle A_1K_1K = \angle 3$ , следовательно  $\angle 1 = \angle 3$  и, значит,  $AK \parallel l$ . Поэтому если  $\beta$  – плоскость, касающаяся  $\omega_1$  в точке  $S$ , то  $AK \parallel \beta$ . Поэтому лучи, проведенные из точки  $S$  и пересекающие окружность  $\gamma$ , вторично пересекают сферу  $\omega$  в точках, лежащих в одной плоскости  $\tau$ . Точки  $A, B$  и  $C$  лежат в этой плоскости, следовательно,  $\tau$  проходит через точку  $O_1$  – центр сферы  $\omega$ .

Теперь рассмотрим множество плоскостей, касающихся  $\omega$  в точках на окружности  $\gamma$ . Они касаются некоторого конуса с вершиной в точке  $O$  (и образующими  $OA_1, OB_1, OC_1$ ). Проведем плоскость через точки  $O, O_1$  и  $S$ . В сечении получатся две пересекающиеся окружности (рис.13), при этом

$$\angle SP_1P = \angle SQ_1Q = 90^\circ,$$

так как  $O_1 \in PQ$ . Но  $OP_1$  и  $OQ_1$  – касательные к окружностям

$$t_6 = \frac{t_2\tau_m + t_1\tau_c}{\tau_c + \tau_m} \approx 23,8^\circ\text{C}; \tau_a = \tau_6 = \tau_c + \tau_m = 63 \text{ мин.}$$

4. Минимальный ток течет через резистор сопротивлением  $R_5$ ;  $I_{\min} = 2$  мА; максимальный ток течет через резистор сопротивлением  $R_4$ ;  $I_{\max} = U/R_4 = 13,3$  мА.

10 класс

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (Ф1795).

2. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (Ф1798).

3.  $Q = (24/5)\pi\epsilon_0 UR$ ;  $I = (24/5)\pi UR/\rho$ .

4.  $I_1 = (I_0 - E_2/R)/2$ ;  $v = \frac{2I_0I}{C_0(\epsilon - 1)(2E_1 + E_2 - I_0R)}$ .

5.  $f_1 = l_1 = 8$  см;  $l_3 = \frac{l_2F_0}{2F_0 - l_2} = 24$  см.

11 класс

1.  $v_{\text{сп}} = 2\pi \frac{Am}{TM} \text{tg} \alpha$ ; ящик не будет подпрыгивать при условии

$$\frac{M}{m} > \frac{4\pi^2}{gT^2} \frac{A}{\cos \alpha}.$$

3.  $Q = (41,2 \pm 0,4)$  мкДж.

4. При  $0 \leq t \leq \pi\sqrt{L_1C}$   $I_2(t) = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L_1}} \sin \omega_{01}t$ , где

$$\omega_{01} = \frac{1}{2\sqrt{L_1C}}, \text{ в дальнейшем } I_2(t) = \frac{U_0}{10} \sqrt{\frac{C}{L_1}} \cos(\omega_{02}t + 4), \text{ где}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{L_1C}}; \text{ см. рис.14, где } t_1 = \pi\sqrt{L_1C}, t_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)t_1,$$

$$t_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)t_1, t_4 = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)t_1.$$

5. См. рис.15, 16 (здесь  $M$  и  $N$  – середины палочки  $SP$  и ее изображения  $S'P'$  соответственно,  $MN$  – оптическая ось линзы,  $O$  – центр линзы,  $F$  и  $F'$  – ее фокусы); в первом случае линза собирающая, а во втором – рассеивающая.

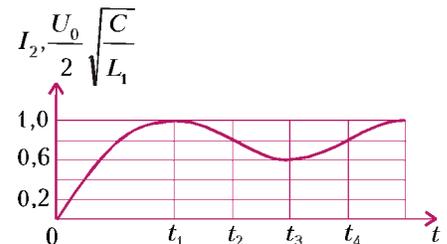


Рис. 14

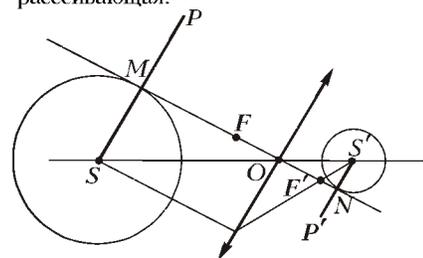


Рис. 14

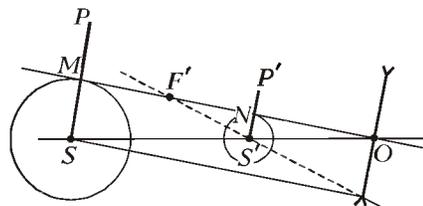


Рис. 15

### Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. *Указание.* Кроме упомянутых мерседесов есть еще  $100 - (30 + 20 + 20) = 30$  машин, которые отделяют друг от друга мерседесы упомянутых цветов; не более чем 30 немерседесов делят мерседесы на не более чем 31 группу подряд стоящих мерседесов. В одной из групп должно быть не менее трех мерседесов, и по условию они должны быть одного цвета.

2. Пусть мы воспользовались несколько раз первым обменом и теперь хотим вернуть свое добро при помощи второго и третьего обменов. Пусть мы совершили  $k$  раз второй обмен,  $n$  раз – третий обмен. Тогда мы сбывли  $3k + n$  кусков мыла и приобрели  $k + 4n$  шил, причем  $3k + n = k + 4n$ , откуда  $2k = 3n$ , следовательно,  $k = 3t$ ,  $n = 2t$  при некотором  $t$ . Проведя эти  $5t$  обменов, мы превратили  $11t$  кусков мыла в такое же количество шил, т. е. мы скомпенсировали потери от  $11t$  обменов первого типа. Итого мы совершили  $16t$  обменов.

3. Федины шаги короче.

4. Нет, нельзя. Сторону длины 103 будем считать вертикальной. Каждый прямоугольник  $9 \times 14$  разобьем на два прямоугольника  $7 \times 9$ . Число 103 представимо в виде суммы числа, делящегося на 7, и числа, делящегося на 9, единственным способом:  $103 = 49 + 54$ . Число 49 аналогично представить нельзя. Заметим, что любая горизонталь (лучше – не идущая по сторонам клеток) имеет длину 49 и рассечена на отрезки – пересечения с прямоугольниками разбиения. В силу сделанного замечания, ни один из этих отрезков не может иметь длину 9, значит, все стороны длины 9 у прямоугольников разбиения ориентированы вертикально. Следовательно, если вертикальная сторона прямоугольника разбиения равна 7, то горизонтальная – обязательно 14. Рассмотрим теперь произвольную вертикаль. Она разбита на отрезки длины 7, 9 и 14. Поскольку отрезки длины 7 и 14 имеют суммарную длину 49, то отрезков длины 7 – нечетное число. Отметим все прямоугольники  $7 \times 14$ , у которых вертикальная сторона равна 7. Отмеченное множество прямоугольников обладает следующим противоречивым свойством: сумма горизонтальных проекций этих прямоугольников – по очевидным причинам число четное, но при этом, в силу того, что каждая вертикаль пересекает нечетное число таких прямоугольников, сумма длин их проекций должна иметь ту же четность, что и горизонтальная сторона большого прямоугольника, т. е. 49 – число нечетное!

5. *Указание.* Разобьем числа на 6 групп: в первую группу возьмем число  $a_1$ , а в остальные пять –  $(a_2, a_3, a_4)$ ,  $(a_5, a_6, a_7)$ , ...,  $(a_{14}, a_{15}, a_{16})$ ; получим оценку суммы всех чисел  $S \geq a_1 + 10$ .

Затем разобьем числа на 4 группы: первая группа – число  $a_2$ , остальные –  $(a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ ,  $(a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$ ,  $(a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_1)$ . Оценив сумму всех чисел, получим  $S \leq a_2 + 12$ .

Из этих двух неравенств находим, что  $a_1 - a_2 \leq 2$ .

В том, что разность  $a_1 - a_2$  действительно может принимать значение 2, убедитесь самостоятельно.

6. Рассмотрим первые три фонаря, потом следующие три фонаря и т. д. В каждой такой тройке фонарей вначале был хотя бы один разбитый. Значит, всего было разбито не менее 50 фонарей. Между любым разбитым фонарем и следующим разбитым фонарем было расположено не более двух других фонарей. Поэтому электрик починил хотя бы один из этих разбитых фонарей. Разделим разбитые фонари на пары последовательно стоящих фонарей. Получится не менее 25 пар. В каждой паре электрик починит хотя бы один фонарь, следовательно, он починит не менее 25 фонарей.

7. Выигрывает Вася. *Указание.* Стратегия Васи очень проста:

не снимать гирию массой 2001 г, пока на его чаше весов еще есть другие гири.

8. Если шестизначное число делится на 9, то его можно представить в виде  $9n$ , где  $n = \overline{abcdef} \leq 111111$ . Нам нужно доказать, что десятичная запись числа  $9n \cdot 111111 = n \cdot 999999 = 10^6 n - n$  содержит девятку. Запишем это вычитание в столбик:

$$\begin{array}{r} abcdef000000 \\ - \quad abcdef \\ \hline \dots \end{array}$$

Заметим, что если  $f = 0$ , то при вычитании в разряде миллионов окажется девятка. Если  $n = 111111$ , то девятка окажется в разряде единиц. Если же  $f \neq 0$  и  $n < 111111$ , то хотя бы одна из цифр  $a, b, c, d, e$  равна 0 и под этой цифрой из-за переносов в меньший разряд в разности будет находиться девятка.

9. 144 операции.

10.  $u/v = 2/3$ . *Указание.* Если  $3u \neq 2v$ , то  $n = |3u - 2v| > 0$ , а числа

$$3(nu + 2) - 2(nv + 3) = n(3u - 2v) = \pm n^2$$

и

$$(nu + 2) - (nv + 3) = n(u - v) + 1$$

делятся на НОД  $(nu + 2, nv + 3)$ , чего не может быть.

11. Фокусники любым способом разбивают 78 карточек на 39 пар и запоминают это разбиение. Какие бы 40 карт зритель ни отдал первому фокуснику, среди них обязательно окажутся две карты из одной пары (так как пар всего 39). Первый фокусник должен дать зрителю две карты из одной пары. Тогда карта, добавленная зрителем, будет из другой пары, и ее без труда сможет определить второй фокусник.

12. Выигрывает Юра. *Указание.* Игрок не может сделать очередной ход лишь тогда, когда на доске остались только две соседние незакрашенные клетки. Такая ситуация может возникнуть только после хода Юры.

13. *Указание.* Треугольник  $ACE$  остроугольный. Поэтому центр его описанной окружности  $O$  лежит внутри. Докажите, что  $O$  служит центром окружности, касающейся всех сторон пятиугольника. Для этого достаточно проверить, что  $O$  лежит на биссектрисах углов  $A, B, D, E$ .

14. *Указание.* Прямые  $BE$  и  $BF$  являются внешними биссектрисами углов  $AEC_1$  и  $CFA_1$ . Внешняя биссектриса делит противоположную сторону в таком же отношении, что и внутренняя (точнее, в противоположном по знаку), а также в отношении, равном отношению прилежащих сторон. Поэтому отношение сторон  $AE:EC_1$  равно 2 (как и  $CF:A_1F$ ).

Далее докажите, что  $\angle AC_1E = \angle CA_1F$ , а угол  $E$  в треугольнике  $ABE$  тупой. Следовательно, угол  $C_1AE$  острый. Аналогично, угол  $A_1CF$  острый. Тогда треугольники  $C_1AE$  и  $A_1CF$  подобны, и  $\angle C_1BE = \angle A_1BF$ .

15.  $60^\circ$ .

Пусть  $D$  – точка, симметричная  $B$  относительно прямой  $AL$ . Ясно, что  $D$  лежит на прямой  $AC$ . В силу симметрии имеем  $KD = KB$  и  $\angle BKD = 2\angle BKL = 60^\circ$ , значит, треугольник  $BKD$  правильный. Заметим, что  $BC$  – биссектриса угла  $KBD$ , так как  $\angle KBC = 30^\circ$ ; значит, точки  $D$  и  $K$  симметричны относительно прямой  $BC$ . Пусть  $E$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $DK$ . Тогда  $E$  симметрична  $N$  относительно  $AL$ , поэтому треугольник  $NKE$  тоже правильный.

Теперь посчитаем углы:  $\angle KBM = \angle KDC$  из симметрии относительно  $AL$ ,  $\angle KDC = \angle DKC$  из симметрии относительно  $BC$ , углы  $DKC$  и  $MKE$  равны как вертикальные. Таким образом,  $\angle KBM = \angle MKE$ . Так как  $\angle EMK$  – внешний угол треугольника  $KBM$ , получаем, что

$$\angle EMK = \angle MKB + \angle KBM = \angle MKB + \angle MKE = \angle BKE = 120^\circ.$$

Так как  $\angle ENK = 60^\circ$ , отсюда следует, что четырехугольник  $EMKN$  вписанный. Значит,  $\angle AMN = \angle EKN = 60^\circ$ .

**16.** Условие задачи не нарушится, если мы будем считать, что каждый депутат знаком с самим собой. Для каждого депутата рассмотрим множество знакомых с ним депутатов. Из условия следует, что никакие два множества знакомых не совпадают (для любых двух депутатов тот третий, который знаком ровно с одним из них, принадлежит множеству знакомых одного и не принадлежит множеству знакомых другого).

**Лемма.** Пусть  $A$  – один из депутатов. Предположим, что президент приказал поменять партию всем депутатам, не знакомым с  $A$ . Тогда в результате этого все депутаты, имеющие не меньше знакомых, чем  $A$  (кроме самого  $A$ ), поменяли партию.

**Доказательство.** Пусть некоторый депутат  $B$ , отличный от  $A$ , не поменял партию. Это означает, что  $B$  не знаком ни с одним депутатом из числа незнакомых с  $A$ . Другими словами, множество знакомых  $B$  содержится в множестве знакомых  $A$ . Так как эти множества не могут совпадать, количество знакомых  $B$  строго меньше, чем количество знакомых  $A$ .

Построим депутатов в порядке невозрастания числа знакомых. Докажем, что для любого натурального  $n$  президент может добиться того, чтобы первые  $n$  депутатов в этом ряду состояли в одной партии. Воспользуемся индукцией. При  $n = 1$  утверждение тривиально. Для индукционного перехода предположим, что первые  $n - 1$  депутатов уже состоят в одной партии, а  $n$ -й депутат (назовем его  $A$ ) – в другой. Пусть президент прикажет поменять партию всем депутатам, не знакомым с  $A$ . Тогда по лемме все, у кого число знакомых не меньше, чем у  $A$  (в том числе все те, кто стоят перед  $A$ ), поменяют партию. Значит, все, кто стоят перед  $A$ , окажутся во второй партии. В той же партии по-прежнему будет и сам  $A$ , значит,  $n$  первых депутатов в ряду будут состоять в одной партии (а именно, во второй). Утверждение доказано.

Следовательно, президент может добиться того, чтобы все депутаты состояли в одной партии. Если это еще не та партия, которую поддерживает он сам, то он прикажет поменять партию всем депутатам сразу, и его цель достигнута.

**17.** Поскольку для любых натуральных чисел  $[m, n](m, n) = mn$ , где  $(m, n) = \text{НОД}(m, n)$ , неравенство можно переписать в виде

$$\frac{mn}{(m, n)} + \frac{(m+1)(n+1)}{(m+1, n+1)} \geq \frac{2mn}{m-n}.$$

Применив к сумме, стоящей в левой части, неравенство о средних, получим, что

$$\begin{aligned} \frac{mn}{(m, n)} + \frac{(m+1)(n+1)}{(m+1, n+1)} &\geq 2\sqrt{\frac{m(m+1)n(n+1)}{(m, n)(m+1, n+1)}} > \\ &> \frac{2mn}{\sqrt{(m, n)(m+1, n+1)}}. \quad (*) \end{aligned}$$

Так как  $m-n : (m, n)$  и  $m-n : (m+1, n+1)$ , а числа  $(m, n)$  и  $(m+1, n+1)$  взаимно просты, то  $m-n : (m, n)(m+1, n+1)$ . Значит,

$$m-n \geq (m, n)(m+1, n+1),$$

но тогда правая часть неравенства (\*) не меньше чем  $2mn/\sqrt{m-n}$ .

**18.**  $f(x) = x$  и  $f(x) = -2x$ .

Пусть  $g(y) = y + f(y)$ . По индукции легко показать, что при любом натуральном  $k$

$$f(x + kg(y)) = f(x) + 2ky. \quad (*)$$

Если мы подставим вместо  $x$  число  $x + kg(y)$ , то получим, что равенство (\*) верно при всех целых  $k$ .

Докажем, что функция  $f(x)$  линейная. Для этого проверим, что при всех  $y \neq 0$  отношение  $g(y)/y$  постоянно. Действительно, применяя формулу (\*) для  $y = y_1$  и  $k = g(y_2)$ , получаем, что

$$f(x + g(y_1)g(y_2)) = f(x) + 2g(y_2)y_1.$$

По той же самой формуле для  $y = y_2$  и  $k = g(y_1)$  имеем

$$f(x + g(y_1)g(y_2)) = f(x) + 2g(y_1)y_2.$$

Стало быть,  $g(y_1)y_2 = g(y_2)y_1$ , т.е.  $g(y_1)/y_1 = g(y_2)/y_2$ . Обозначим это отношение через  $\alpha + 1$ . Тогда

$$y + f(y) = (\alpha + 1)y,$$

откуда  $f(y) = \alpha y$  при  $y \neq 0$ . Заметим, что  $\alpha \neq 0$ , в противном случае, например, при  $x \neq 0$  и  $x \neq -f(1) - 1$  должно выполняться равенство

$$0 = f(x + 1 + f(1)) = f(x) + 2 = 2.$$

Покажем далее, что  $f(0) = 0$ . Для этого подставим в условие на функцию число  $x$ , отличное от 0 и  $f(0)$ , и  $y = 0$ . Получим  $\alpha(x + f(0)) = f(x + f(0)) = f(x) = \alpha x$ , откуда  $f(0) = 0$ . Таким образом,  $f(x) = \alpha x$  при всех целых  $x$ . Установим, при каких  $\alpha$  функция  $f(x) = \alpha x$  удовлетворяет условию. Для этого подставим  $x = 0$  и  $y = 1$ , получим квадратное уравнение на  $\alpha$ :  $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ , откуда  $\alpha = 1$  или  $\alpha = -2$ .

**19.** Прямоугольники, вырезанные из таблицы, будем называть полосками. Предположим, что полоска  $1 \times 20$  расположена вертикально.отрежем от квадрата  $20 \times 20$  слева и справа по прямоугольнику  $1 \times 20$ . Каждый из них разрежем на 10 прямоугольников  $1 \times 2$ , а оставшуюся часть доски – на 90 квадратов  $2 \times 2$ . Квадраты  $2 \times 2$  или пару прямоугольников  $1 \times 2$ , расположенных на одной горизонтали по разные стороны квадрата  $20 \times 20$ , назовем *обобщенными квадратами*.

Если одна из клеток обобщенного квадрата была вырезана при вырезании полоски  $1 \times k$ , то мы будем говорить, что полоска задевает квадрат.

Заметим, что если из какого-то обобщенного квадрата  $2 \times 2$  нельзя вырезать ни одной доминошки (прямоугольника  $1 \times 2$ ), то этот квадрат задевают по крайней мере две полоски. Если из обобщенного квадрата нельзя вырезать две доминошки, то его задевает как минимум одна полоска. Таким образом, если из обобщенного квадрата нельзя вырезать больше чем  $k$  доминошек, то его задевает как минимум  $2 - k$  полоски. Поскольку всего в разбиении ровно 100 обобщенных квадратов, то количество доминошек, которое можно будет заведомо вырезать из квадрата  $20 \times 20$ , будет не меньше чем 200 минус общее число задеваний обобщенных квадратов всеми полосками.

Рассмотрим теперь разрезание на обобщенные квадраты, полученное из первоначального поворотом на  $90^\circ$ . Для этого разрезания также верно, что если из обобщенного квадрата нельзя вырезать больше чем  $k$  доминошек, то его задевает как минимум  $2 - k$  полоски. Единственное исключение представляет собой пара прямоугольников  $1 \times 2$ , которую задевает полоска  $1 \times 20$ . Из такого обобщенного квадрата нельзя вырезать ни одной доминошки. Для удобства будем считать, что вертикальная полоска  $1 \times 20$  дважды задевает такой обобщенный квадрат.

Подсчитаем, какое количество обобщенных квадратов задевает полоска  $1 \times k$ . Для определенности будем считать, что полоска расположена вертикально. Если  $k = 2m - 1$ , то полоска  $1 \times k$  задевает по  $m$  обобщенных квадратов первого и второго разрезаний, в сумме  $2m = k + 1$ . Если  $k = 2m$ , то полоска  $1 \times k$  на одном разрезании задевает  $m$  обобщенных квадратов,

а на втором  $m + 1$ , в сумме  $2m + 1 = k + 1$ . Это равенство будет справедливо и для полоски  $1 \times 20$ , поскольку мы считаем, что она дважды задевает пару прямоугольников  $1 \times 2$ .

Подсчитаем общее количество задеваний:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 21 = 230.$$

Следовательно, для одного из двух разбиений общее количество задеваний полосок будет не более чем 115. Далее будем рассматривать только это разбиение на обобщенные квадраты. Как уже отмечалось, количество доминошек, которое можно будет вырезать, не меньше, чем удвоенное количество обобщенных квадратов минус общее число задеваний квадратов этого разбиения, т.е.  $200 - 115 = 85$ .

Приведем пример, который показывает, что вырезать 86 домино, вообще говоря, не удастся. Вырежем полоски из верхней части квадрата  $20 \times 20$  так, как показано на рисунке 17 (невырезанные клетки закрашены). При таком положении

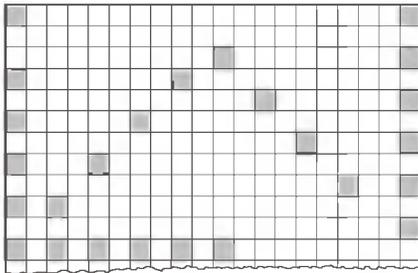


Рис. 17

полосок из верхней части нельзя больше вырезать ни одной доминошки. В нижней части квадрата остается 171 незанятых клеток. Поэтому 86 доминошек разместить в ней не удастся.

**20.** Выигрывает первый игрок.

Разобьем все натуральные числа, большие 1, на два множества  $L$  и  $W$ : число  $n$  отнесем к множеству  $L$ , если оно имеет вид  $2^{2k+1}m + 1$ , где  $m$  нечетно, и к множеству  $W$  в противном случае, т.е. если оно имеет вид  $2^{2k}m + 1$  (число  $m$  снова нечетное). Все четные числа будут принадлежать  $W$ .

Покажем, что если на доске написано число из множества  $W$ , то его всегда можно превратить в число из множества  $L$ . А если на доске оказалось число из множества  $L$ , то любой ход переводит его в число из множества  $W$ .

Тогда, поскольку вначале на доске выписано число из множества  $W$ , первый игрок имеет выигрышную стратегию: каждым ходом он должен превращать число из множества  $W$  в число из  $L$ . Второй игрок ответным ходом вновь выпишет на доску число из  $W$ . Поэтому эта стратегия корректно определена, и числа из множества  $W$  будут встречаться только у первого игрока. Так как числа уменьшаются, когда-нибудь ему попадет число 2, и он выпишет на доску единицу.

Пусть на доске написано число  $n \in W$ , т.е. число вида  $2^{2k}m + 1$ . Если  $k$  положительно, то число  $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = 2^{2k-1}m + 1$  принадлежит  $L$ , а если  $k$  равно нулю, то  $n = m + 1 = (2l + 1) + 1 = 2l + 2$ . Следовательно, из  $n$  можно получить числа

$n - 1 = 2l + 1$  и  $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = l + 1$ . Одно из этих чисел (если  $l \neq 0$ ), очевидно, принадлежит множеству  $L$ . Если же  $l$  равно нулю, то оба эти числа равны 1 и игра закончилась.

Если на доске оказалось  $n \in L$ , т.е. число вида  $2^{2k+1}m + 1$ , то из него можно получить либо число  $n - 1 = 2^{2k+1}m$ , которое лежит в  $W$ , поскольку является четным, либо число

$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = 2^{2k}m + 1$ , тоже принадлежащее множеству  $W$ .

**21.** Докажем утверждение задачи индукцией по  $n$ . База  $n = 1$  очевидна.

Посетителя, сыгравшего наибольшее количество партий, назовем Гариком. Если Гарик сыграл не больше  $(n + 1)/2$  партий, то и все остальные сыграли не более  $(n + 1)/2$  партий каждый, и общее количество партий не превосходит  $n(n + 1)/2$ . Пусть Гарик сыграл хотя бы  $(n + 1)/2$  партий. Будем называть партию, в которой не играл Гарик, *интригующей*. Поскольку Гарик сыграл не более  $n$  партий (по условию), то достаточно проверить, что интригующих партий не более  $n(n - 1)/2$ . Это сразу следует из индукционного предположения, если только мы проверим, что множество посетителей без Гарика удовлетворяет условию задачи.

Итак, докажем, что каждый посетитель сыграл не более  $n - 1$  интригующих партий и каждые два не игравших друг с другом посетителя сыграли не более  $n - 1$  интригующих партий на двоих. Для посетителей, игравших с Гариком (или пар не игравших друг с другом посетителей, один из которых играл с Гариком), это непосредственно вытекает из условия: этот посетитель (соответственно, пара) сыграл(а) всего не больше  $n$  партий, стало быть, интригующих — не более  $n - 1$ . Каждый же из не игравших с Гариком посетителей сыграл не более  $(n - 1)/2$  партий (поскольку вместе с Гариком они сыграли не больше  $n$ ), так что для них и пар, составленных из них, утверждение также верно.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия,  
Е.А.Силина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

## ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

**Л.З.Симакова**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во №0110473**

**Подписано в печать . Тираж экз.**

**Адрес редакции:**

**117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,  
тел. 930-56-48**

**Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховском полиграфическом комбинате  
Комитета Российской Федерации по печати  
142300 г. Чехов Московской области  
Заказ №**

# Волшебные фигуры

Безграничное море шахматных игр, задач и головоломок возникает при появлении на доске сказочных фигур, надленных фантастическими свойствами.

**Магараджа** – это фигура, объединяющая в себе ферзя и коня. Она является главным действующим лицом в следующей интересной игре.

У одного игрока имеется полный комплект фигур, стоящих на исходных местах, а у другого – один магараджа, которого он ставит на произвольное поле. Магараджа проигрывает, если его удастся побить, и выигрывает, если ставит мат неприятельскому королю.

Пешкам запрещено превращаться, иначе выигрыш слишком прост. Но при этой оговорке магараджа оказывает упорное сопротивление, а неопытный игрок вообще может быстро получить мат. И все же имеется четкий способ расправиться с магараджей, причем цель достигается всего за 15 ходов.

Не обращая внимания на перемещения этой мощной фигуры, белые делают подряд следующие 14 ходов: **a2-a4, h2-h4, ♘c3, ♘f3, ♙a3, ♙h3, ♙b3, ♙g3, d2-d4, ♗d3, ♗e4, ♙b7, ♗d5, ♙g8**. При этом магараджа не может взять ни одной белой фигуры (они надежно защищены), и теперь у него имеется лишь два свободных поля – a6 и f6. На поле f6 он гибнет после **15. e4**, а на поле a6 – после **15. ♖g5** (на диаграмме магараджу заменяет ферзь).



Весьма оригинальна игра, придуманная американским математиком Л. Сильверманом. Белые ставят своего магараджу на любое поле доски, в ответ черные ставят своего магараджу на любое поле доски, которое не находится под боем. Далее игроки по очереди переставляют своего магараджу (не обязательно его ходом) на любое поле, не атакуемое неприятельским магараджей. Но освободившееся поле исключается – например, на него ставится фишка. Выигрывает тот, кто сделал последний ход.

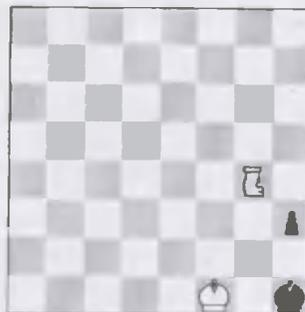
На доске 5×5 первый игрок сразу берет верх, делая ход в центр доски: все остальные поля оказываются под боем, и второй игрок даже не может выставить своего магараджу. А вот на обычной доске играющий черными всегда выигрывает. Для этого он мысленно делит доску на четыре прямоугольника 8×2 и нумерует поля следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	1	2	3	4

После каждого хода белых он занимает поле в том же прямоугольнике и с тем же номером, что и поле, занятое белым магараджей.

Магараджа – лишь один из многих десятков сказочных персонажей, придуманных любителями необычных игр. Назовем фигурой (a,b) фигуру, которая за один ход сначала перемещается на a клеток по горизонтали или вертикали, а затем на b клеток в перпендикулярном направлении. При a=1, b=2 получается обычный конь, при a=b – слон, передвигающийся на фиксированное число полей; сказочные персонажи получаются при других значениях a и b: (1,3) – верблюд, (1,4) – жираф, (2,3) – зебра.

Коня, совершающего несколько ходов подряд в одном направлении (например, b1-d2-f3 или b1-c3-d5-e7), именуют всадником (обозначается **B**, на диаграмме изображается в виде перевернутого коня). Это очень популярная фигура в мире шахматной фантастики.



Т. Доусон, 1926

Мат в 2 хода, на b4 всадник

При обычном коне на b4 это была бы старинная задача К. Яниша (1837) с заданием: мат в 6 ходов – 1. ♘c2+ ♘a2 2. ♘d4 ♘a1 3. ♘c2 ♘a2 4. ♘e2 ♘a1 5. ♘c1 a2 6. ♘b3×.

Но у нас на b4 – не конь, а всадник, и мы имеем хитрую двухходовку. Всадник объявляет мат, далеко ускакав от черного короля: 1. **Bc6!** a2 (всадник продолжает контролировать поле a2 по линии c6-b4-a2, поэтому оно недоступно черному королю) 2. **Bg4×!** (с поля g4 всадник нападает на неприятельского короля по другой линии g4-e3-c2-a1).

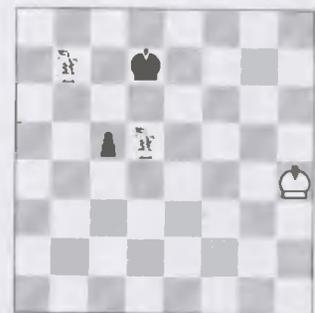


Кооперативный мат в 5 ходов, на f8 всадник

Черный король неподвижен (поля g6 и h4 контролирует всадник с f8), но как белые могут на пятом ходу напасть на него, даже при желании противника?

1. **b5** (начинают черные) **b4 2. Ba b5 3. a3 b6 4. a2 b7 5. b8B×!** Только превращенный всадник сумел в положенный срок добраться до короля.

Многие сказочные фигуры, подобно магарадже, являются комбинированными. Императрица объединяет в себе ладью и коня, кентавр – слона и коня, дракон – пешку и коня (обозначается **D**, превращаться в другие фигуры дракону запрещено).



Я. Владимиров, 2000

Мат в 4 хода, на b7 и d5 драконы

У черных только два хода: королем на e8 (остальные поля ему недоступны) и пешкой.

1. ♔g5! c4 2. Dc5+ ♔c8 3. Dc6! (черный король запатован) 3...c3 4. Db6× 2... ♔d8 3. Dd6! c3 4. De6×, 2... ♔e8 3. De6 c3 4. Df6×. В случае 1... ♔e8 решает 2. Df6+ ♔f8 (f7) 3. Dd8! и 4. De6×.

Е. Гук

## Физики на монетах мира



В 1984 году в СССР к 150-летию со дня рождения создателя периодической системы элементов был выпущен в обращение юбилейный медно-никелевый рубль. На его реверсе размещен портрет ученого, обрамляющая его надпись "Д.И.Менделеев" и даты жизни ученого "1834-1907".

К юбилею Санкт-Петербургского государственного университета в 1999 году вышла памятная серебряная монета достоинством в 3 рубля с портретами его выдающихся профессоров А.А.Ухтомского, В.И.Смирнова, В.А.Фока, Д.И.Менделеева.

Наконец, в 2000 году собственно периодическая система элементов заняла центральное место на реверсе серебряной монеты достоинством в 3 рубля из серии "Россия на рубеже тысячелетий". (Немало подивился бы великий ученый, увидев это произведение чеканщиков Московского монетного двора – в представленной на монете таблице отсутствует ряд щелочных металлов.)

(Подробнее о Д.И.Менделееве и периодической системе элементов – внутри журнала.)